Examen General de Álgebra Moderna

Julio 2013

Lee **cuidadosamente** todos los ejercicios antes de comenzar a resolver el examen.
Para aprobar es necesario resolver **bien** al menos 6 ejercicios **completos**.

Ejercicio 1 Sea $\phi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos y $N \lhd G$ un subgrupo normal de G tal que $N \subset \operatorname{Ker}\phi$.

1. Prueba que ϕ induce un homomorfismo $\overline{\phi} : G_1/N \to G_2$.
2. Prueba que $\overline{\phi}$ es sobreyectivo si y solo si ϕ es sobreyectivo. De la misma forma $\overline{\phi}$ es inyectivo si y solo si $\operatorname{Ker}\phi = N$.
3. Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfismo para grupos.
4. Prueba que $(\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo normal de $(\mathbb{R}, +)$ y que el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo multiplicativo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ejercicio 2 Sea G un grupo **abeliano** de orden $p^e m$ con p un primo tal que $p \nmid m$. Demuestra que G contiene un subgrupo de orden p^r para cada $r \leq e$.

Ejercicio 3

1. Prueba que no hay grupos simples de orden 56.
2. ¿Cuántos grupos (salvo isomorfismo) de orden 33 existen ?

Ejercicio 4 Sea R un anillo conmutativo con unitario, $I \subset R$ un ideal.

1. Prueba que el anillo cociente R/I es un dominio entero si y solo si I es un ideal primo.
2. Prueba que el anillo cociente R/I es un campo si y solo si I es un ideal maximal.
3. Prueba que si D es un dominio entero finito, entonces D es un campo.

Ejercicio 5 Sea $K[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en el campo K. Si $J \subset K[x]$ es un ideal distinto de cero, prueba que los siguientes enunciados son equivalentes :

1. J es un ideal primo.
2. J es un ideal maximal.
3. J está generado por un polinomio irreducible.

Ejercicio 6 Sea R un anillo con unitario y M un R-módulo izquierdo.

1. Prueba que si M es un $R-$módulo libre entonces M es isomorfo a una suma directa de copias de R.
2. Prueba que si M es un $R-$módulo libre entonces M es proyectivo. Es decir, para todo morfismo de R-módulos $\gamma : M \to N$ y morfismo sobreyectivo $\varepsilon : L \to N$ existe un morfismo $\beta : M \to L$ tal que $\epsilon \circ \beta = \gamma$.

Ejercicio 7 Sean V, W submódulos de un módulo U.

1. Demuestra que $V \cap W$ y $V + W$ son submódulos.
2. Demuestra el segundo teorema de isomorfismo : $(V + W)/W$ es isomorfo a $V/V \cap W$

Ejercicio 8 Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango n. Prueba que si $p \in \mathbb{Z}$ es primo entonces el $\mathbb{Z}$-módulo $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ espacio vectorial de dimensión n.

Ejercicio 9 Sea M un R-módulo. Definimos el submódulo de torsión de M como :

$$\mathrm{Tors}(M) := \{m \in M \mid \text{existe un no divisor de cero } r \in R \text{ tal que } rm = 0\}$$

1. Prueba que $\mathrm{Tors}(M)$ es en efecto un submódulo de M.
2. Sea K un campo, y M un $K[x]-$módulo tal que M es un K espacio vectorial de dimensión finita. Notemos que la acción de $K[x]$ en M está dada por :

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \cdot m = (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n)(m)$$

   donde $T : M \to M$ es una K-transformación lineal. Demuestra que $\mathrm{Tors}(M) = M$.