Examen general de Análisis Funcional

Enero de 2014

Notas: Debes resolver los cuatro primeros ejercicios y escoger dos de entre los tres últimos. Señala con claridad cuáles dos escoges. Con 66 puntos obtenidos pasas. El examen tendrá una duración de 4 horas.

(1) Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando tu respuesta:

(a) (10 puntos) Si X y Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X en Y es continuo.

(b) (10 puntos) Si $(f_n)_n \subset X^*$ es una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos definidos en un espacio de Banach X y para cada $x \in X$ se define $T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots)$, entonces T es un operador lineal continuo de X en ℓ_∞.

(c) (10 puntos) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio vectorial de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$.

(2) (Funciones de Rademacher). Sea la función signo definida como $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima función de Rademacher se define como
$r_n(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(2^n \pi t))$ para todo $t \in [0;1]$. Prueba:

a) (10 puntos) El conjunto $(r_n)_n^\infty$ es ortonormal en $L_2[0;1]$.

b) (10 puntos) $(r_n)_n$ no es un sistema completo en $L_2[0;1]$.

(3) (15 puntos) Denotemos por $R[a,b]$ la colección de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Riemann-integrables en el interval$[a,b]$. Observa que $R[0,1]$ es un espacio vectorial y sea $\|f\| := \int_a^b |f(s)|ds, \ \forall f \in R[a,b]$.

i) Determina si $\|\cdot\|$ es una norma.

ii) Observa que $C[a,b] \subset R[a,b]$ y determina si $\|\cdot\|$ es una norma en $C[a,b]$.

iii) Si la respuesta en ii) es afirmativa, determina si el espacio normado resultante es completo.

En cada caso justifica tu respuesta.

(4) (10 puntos) Sea X un espacio de Banach y $W \subset X$ un subespacio cerrado. Prueba que la proyección canónica $\pi : X \to X/W$ preserva abiertos, esto es, si $V \subset X$ es abierto entonces, $\pi(V) \subset X/W$ es abierto.

---

(5) (10 puntos) Sean X y Y espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador lineal y $F \subset Y^*$ que separa puntos de Y. Si $f(T(x_n)) \to 0$ para toda $f \in F$ y $\{x_n\}_n \subset X$ tal que $\|x_n\| \to 0$, entonces T es continuo. (Sugerencia: usa el teorema de la grafica cerrada).

(6) (10 puntos) Sea F un subespacio denso de un espacio normado E. Prueba que F^* y E^* (sus respectivos espacios duales) son isométricamente isomorfos.

(7) (10 puntos) Sea c el espacio de las sucesiones de escalares que son convergentes, dotado de la norma del supremo, esto es,

$$c := \{(x_n)_n \subset \mathbb{R}, \text{ tal que existe } \lim_{n\to\infty} x_n\}, \ \|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n\{|x_n|\}.$$

Prueba que c es isomorfo a c_0.