Examen General

Análisis I

INSTRUCCIONES: En cada uno de los ejercicios justifica tu respuesta.

1. Probar las siguientes propiedades para subconjunto de R^n:

   a)
   $$int(int(A)) = int(A)$$

   b)
   $$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$$

2. Suponga que $A \subset R^n$ no es compacto. Probar que existe una sucesión $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \cdots$ de conjuntos cerrados tal que $F_k \cap A \neq \emptyset$ para todo k y $(\cap_{k=1}^{\infty} F_k) \cap A = \emptyset$.

3. Mostrar que $F : A \to R^m$, $A \subset R^n$ es continua si y solo si para cada conjunto $B \subset A$,
   $$f(cl(B) \cap A) \subset cl(f(B)).$$

4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ es uniformemente convergente.

5. Sea $f : [a, b] \to R$ continua. Usar la condición de Riemann y continuidad uniforme para probar que f es integrable.

6. Establezca si el sistema
   $$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + xyz; \\ v(x, y, z) &= y + xy; \\ w(x, y, z) &= z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$
   puede ser resuelto para x, y y z en términos de u, v y w cerca de $(0, 0, 0)$.

7. Usar el teorema de Green para probar que
   $$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int\int_{\Omega} \Delta u \, dxdy$$
   donde Ω es un dominio de Jordan con frontera parametrizada por longitud de arco y dada por $z = z(s) = (x(s), y(s))$ y $u = u(z) \in C^2(\Omega^+)$; Ω^+ es un dominio que contiene a Ω y a $\partial\Omega$.