CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

Examen General (Análisis Funcional I)

Enero 2016

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja del examen. Resuelve sólo 8 de los 10 ejercicios. Marca con un círculo cuales son los ejercicios que quieres que te califiquemos, los dos restantes no se tomarán en cuenta para la evaluación. El examen se calificará sobre 80 puntos. Para aprobar requieres al menos 56 puntos. ¡Suerte!

1. (10 puntos) Determina si $\mathcal{R}[a,b]$, el espacio de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Riemann-integrables, con la norma del supremo es completo. (Argumenta tu respuesta).
2. (10 puntos) Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de H. Prueba que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto ortonormal de H y $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - x_n\| < 1$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H.
3. (10 puntos) Prueba que $L_1[0,1]$ no es un espacio de de Hilbert.
4. (10 puntos) Sean X un espacio de Banach y $f \in S_{X^*}$. Muestra que para cada $x \in X$ se tiene que $d(x, f^{-1}(0)) = |f(x)|$.
5. (10 puntos) Sea $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio de Banach X y $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ un conjunto de números reales. Muestra que existe $f \in X^*$ tal que $f(x_i) = \alpha_i$, para $i = 1, ..., n$.
6. (10 puntos) Sean X y Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Prueba que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq \delta \|x\|$ para toda $x \in X$ si y sólo si $\ker(T) = \{0\}$ y $T(X)$ es cerrado en Y.
7. (10 puntos) Sea $T \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$. Muestra que T es un operador adjunto si y sólo si T es $w^* - w^*$-continuo.

8. (10 puntos) Supón que $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son dos normas no equivalentes en un espacio vectorial X. Muestra que existe un funcional lineal en X que es continuo respecto a una de estas normas y no continuo respecto a la otra.
9. (10 puntos) Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo X. Muestra que X/Y es reflexivo.
10. (10 puntos) Sean X y Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Muestra que si X es reflexivo y T es sobre, entonces Y es reflexivo.