EXAMEN GENERAL DE ANÁLISIS FUNCIONAL I

Instrucciones:

$\diamond$**:** El examen tiene una duración de 4 horas y media.

$\diamond$**:** El total de puntos en el examen es 60. Se considera aprobado si se obtienen 42 puntos.

Problemas

1. (10 pts) Sea H un espacio de Hilbert. Supongamos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ es un conjunto ortonormal. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Prueba que $A = \{a_n e_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene cerradura compacta si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. (10 pts) Sea $\lambda = \{\lambda_n\} \in \ell_\infty(\mathbb{C})$. Definimos $T_\lambda : \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ por $T_\lambda(\{x_n\}) = \{\lambda_n x_n\}$. Prueba que T_λ es audoadjunto si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

3. (10 pts) Sean X, Y espacios normados, $X \neq \{0\}$ y $\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y : T$ es lineal y continua$\}$ con la norma usual. Demuestra que si $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio de Banach, entonces Y es un espacio de Banach.

4. (10 pts) Sea $G = \{\{x_n\} \in \ell_1 : \forall n \in \mathbb{N}, x_{2n-1} = 0\}$. Prueba que para toda $f \in G^*$ existe un número infinito de funciones $\widetilde{f} \in \ell_1^*$, tales que $\widetilde{f}|_G = f$ y $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

5. Sea $X = \mathcal{C}[0,1]$, $p > 1$ y $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En X consideramos la norma $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

   a) (3 pts)Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{q}, 1\right)$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n^* : X \to \mathbb{R}$ por $x_n^*(f) = n^\alpha \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$. Prueba que $\forall f \in X \lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(f) = 0$.

   b) (5 pts)Prueba que $\{x_n^*\}$ no es uniformemente acotada.

   c) (2 pts)Prueba que $(X, \|\cdot\|_p)$ no es un espacio de Banach.

6. Sea $X = \{\{a_n\} \subset \mathbb{R}$: existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m = 0, \forall m \geq n\}$. En X definimos $\|\{a_n\}\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\|\{a_n\}\|_\infty = \sup\{|a_n|\}$.

   a) (5 pts) Prueba que la función identidad $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_\infty)$ es continua pero no abierta.

   b) (5 pts) Prueba que la función identidad $I : (X, \|\cdot\|_\infty) \to (X, \|\cdot\|_1)$ tiene gráfica cerrada, pero no es continua.