

Julio de 2016

INSTRUCCIONES: Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa tus respuestas en la esquina superior izquierda. Escribe tu nombre en cada una de tus hojas de respuestas. Todos los problemas valen lo mismo. La calificación mínima para aprobar es 8.

1. Resuelve el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

determina los espacios estable, inestable y/o centro, y bosqueja el retrato fase.

2. Sea A una matriz real de 2×2 . Suponga que el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

tiene una solución periódica no trivial $u(t)$, i.e. para todo $t \in \mathbb{R}$, $u(t+p) = u(t)$ para algún $p > 0$. Demuestra que cualquier solución es periódica con el mismo periodo p .

3. Considera la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

donde \mathbf{v} es un eigenvector de A con eigenvalor λ . Supongamos que A tiene n eigenvectores linealmente independientes asociados a eigenvalores distintos. Prueba que no hay una solución de la forma $\varphi(t) = \mathbf{k}e^{\lambda t}$.

4. Demuestra que el mapeo continuo $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$H(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + \frac{x_1^2}{3} \right)$$

tiene una inversa continua $H^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y que el sistema no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2 + x_1^2, x_3 + x_1^2)$ se transforma bajo dicho mapeo H en el sistema lineal $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ con $A = D\mathbf{f}(0)$, donde $\mathbf{y} = H(\mathbf{x})$. Describe la estabilidad del sistema no lineal y sus variedades locales estable e inestable, y bosqueja el retrato fase.

5. Analiza la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3 \end{aligned}$$

usando una función de Lyapunov apropiada.