CIMAT Examen General Julio 5, 2012

Variable Compleja

Resuelve todos los problemas y justifica tus soluciones. Tiempo límite: 4 horas.

1. Encuentra la forma más general posible para que el polinomio

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

sea una función armónica. Encuentra su *conjugado armónico*, es decir, encuentra $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea una función analítica.

2. Calcula las integrales

(a)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}dz$$
donde $0 < |\alpha| < r < |\beta|$.

(b)
$$\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{4z^n - 1}dz$$
para todo entero $n > 0$.

3. Calcula explícitamente una función conforme que transforme la banda infinita

$$S = \{z \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$$

en el disco unitario.

4. Demuestra el Teorema de Morera: Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo (una *región*) y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que

$$\int_\gamma f = 0$$

para toda curva cerrada $\gamma \subset A$. Entonces f es analítica en A y existe una función analítica $F : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = F'(z)$ para todo $z \in A$.

5. Sea f una función analítica en el complemento de los ejes real e imaginario. ¿Es posible extender f a una función entera? Demuéstralo o proporciona un contraejemplo.

6. Demuestra el Teorema de Weierstrass–Casorati: Sea $R > 0$ y para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$, define $D^* = \{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$. Supón que la función f es analítica en D^* y tiene una singularidad esencial en z_0. Demuestra que para cada $0 < r < R$, el conjunto $\{f(z) \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ es denso en el plano complejo.