**Examen General de Variable Compleja**
**Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas - CIMAT**
**Martes 12 de enero de 2016**

**Cada Problema vale 10 puntos (hay un total de 60 puntos).**
**Se requieren 40 puntos para aprobar el examen.**

1. Calcula el valor de **una** de las siguientes integrales:
   *a)*
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}dz,$$
   donde $\alpha$ y $\beta$ son números complejos tales que $0<|\alpha|<r<|\beta|$.
   *b)*
   $$\int_{|z|=1}\frac{z^{n-1}}{4z^n-1}dz$$
   para todo entero $n>0$.
2. Calcula el valor de la siguiente integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$
   utilizando residuos.
3. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demuestra que si $\gamma$ es un círculo con centro en $z_0$ suficientemente pequeño, entonces
   $$\frac{2\pi i}{f'(z_0)}=\int_{\gamma}\frac{dz}{f(z)-f(z_0)}.$$
4. Demuestra el Teorema de Identidad Analítica: Sea $B \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f, g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones analíticas en $B$ tales que $f(z)=g(z)$, para todo $z$ en un conjunto $C$ que tiene un punto de acumulación en $B$. Entonces $f(z)=g(z)$ para todo $z \in B$.
5. *a)* Sea $f$ una función analítica en todo $\mathbb{C}$, tal que $f$ tiene una singularidad no-esencial en $\infty$. Demuestra que $f$ es un polinomio.
   *b)* Sea $f(z)=az+b$, con $a \neq 0$ y $b$, números complejos. Demuestra que toda transformación biyectiva y conforme del plano complejo en sí mismo es de esta forma.
6. Sea $\Delta=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$, el disco unitario abierto. Determina todas las posibles funciones $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ analíticas y biyectivas tales que $f(1/2)=0$.