Examen General de Variable Compleja
Maestrías en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT.
4 de julio de 2013

1. Sea log la rama principal del logaritmo ($-\pi \leq \arg(z) < \pi$) y sea
$$g(z) = \log(z^2 + 1).$$
Calcula el *dominio* (abierto conexo) más grande en el que g es analítica.

2. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ (es decir, si $ta + rb = 0$ para algunos $t, r \in \mathbb{R}$, entonces $t = r = 0$). Si h es una función *entera* (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) que satisface
$$h(a + z) = h(b + z) = h(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$
demuestra que h es constante.

3. Calcula todos los ceros de la función $g(z) = \cos(\pi z)$ y determina su multiplicidad. Utiliza esto para calcular los residuos de $1/g(z)$ en cada una de sus singularidades.

4. Denota por $\{u_n(z)\}_{n\geq 1}$ una sucesión infinita de funciones armónicas y uniformemente acotadas definidas sobre un abierto no vacío simplemente conexo U. Si existe un subdominio propio y simplemente conexo $V \subset U$ donde la sucesión converge uniformemente, demuestra que $\{u_n(z)\}_{n\geq 1}$ converge en todo U.

5. Calcula
$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} dx.$$