Examen General de Variable Compleja
Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas - CIMAT
Viernes 8 de julio de 2016

Cada Problema vale 10 puntos (hay un total de 60 puntos).
Se requieren 40 puntos para aprobar el examen.

1. Calcula el valor de **una** de las siguientes integrales:
   a)
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}dz,$$
   donde α y β son números complejos tales que $0<|\alpha|<r<|\beta|$.
   b)
   $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos(\theta)},\qquad 0<b<a$$
2. Calcula la serie de Laurent alrededor de $z_0=0$ de la función
   $$f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)},$$
   y calcula su dominio de convergencia.
3. Sean $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{im}(z)\geq 0\}$ y $\mathbb{H}^+=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{im}(z)>0\}$. Sea $A\subset\mathbb{C}$ un subconjunto abierto y simétrico respecto al eje real (esto es, $z\in A\Longleftrightarrow \bar{z}\in A$) tal que $A\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$.
   Supongamos que $f:\mathbb{H}\cap A\longrightarrow\mathbb{C}$ es una función continua que satisface
   a) $f(z)\in\mathbb{R}$ para todo $z\in\mathbb{R}\cap A$.
   b) f es analítica (u holomorfa) en el abierto $A^+=\mathbb{H}\cap A$.
   Demuestra que existe una función analítica $F:A\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $F|_{A^+}=f$.
4. Demuestra el Teorema de Identidad Analítica: Sea $B\subset\mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f,g:B\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones analíticas en B tales que $f(z)=g(z)$, para todo z en un conjunto C que tiene un punto de acumulación en B. Entonces $f(z)=g(z)$ para todo $z\in B$.
5. *a)* Sea f una función analítica en todo $\mathbb{C}$, tal que f tiene una singularidad no-esencial en ∞. Demuestra que f es un polinomio.
   b) Sea $f(z)=az+b$, con $a\neq 0$ y b, números complejos. Demuestra que toda transformación biyectiva y conforme del plano complejo en sí mismo es de esta forma.
6. Sea $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|<1\}$, el disco unitario abierto. Determina todas las posibles funciones $f:\Delta\longrightarrow\Delta$ analíticas y biyectivas tales que $f(1/2)=0$.