EXAMEN GENERAL
ÁLGEBRA
6 DE JULIO DE 2017

Instrucciones: Resolver los problemas siguientes presentado justificaciones y cálculos completos.

1. Sea G un grupo con H, K subgrupos normales. Probar que si $H \cap K = \{e\}$ y G tiene a $H \cup K$ como conjunto de generadores, entonces $G/H \simeq K$.
2. Sea I un ideal en un anillo conmutativo R con $1_R \neq 0$. Probar que I es un ideal primo si y sólo si R/I es un dominio entero.
3. Sea R un anillo con identidad y $A_1, \ldots, A_n$ una familia de ideales tales que $A_i + A_j = R$ para cualesquiera $i \neq j$. Probar que para cualquier colección $b_1, \ldots, b_n \in R$ existe $b \in R$ tal que $b \equiv b_i \pmod{A_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
4. Sea P un R-módulo unitario proyectivo. Probar que existe un R-módulo A tal que $A \oplus P$ es un R-módulo libre.
5. Probar que si A es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango n y p es un número primo, entonces
$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
es un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espacio vectorial de dimensión n.
6. Sea R un anillo conmutativo con identidad y A, B, C R-módulos unitarios. Probar que existe un isomorfismo
$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes_R B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(B, C))$$
de R-módulos.
7. Sea G un grupo finito y $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación irreducible en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita. Sea $T : V \to V$ una transformación $\mathbb{C}$-lineal tal que
$$T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$$
para todo $g \in G$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$. Dar un ejemplo que muestre que la conclusión no se satisface si substituimos al campo $\mathbb{C}$ por el campo $\mathbb{R}$.