EXAMEN GENERAL
ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1. Alka-Seltzer contiene bicarbonato de sodio ($NaHCO_3$) y ácido cítrico ($H_3C_6H_5O_7$). Si una pastilla de se disuelve en aguase produce la siguiente reacción las cual produce citrato de sodio ($Na_3C_6H_5O_7$), agua (H_2O) y dióxido de carbono (CO_2):

$$NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \longrightarrow Na_3C_6H_5O_7 + H_2O + CO_2.$$

Encuentra la cantidad de moléculas que debe haber de cada reactivo para que se preserve el número de elementos de cada lado en función de un solo elemento (es decir, balancea la ecuación).

Problema 2. Encuentra las ecuaciones de linea que mejor aproxima $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Problema 3. Sea $V = \mathbb{R}^n$ Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ tal que para cada valor propio λ tenemos $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

- Demuestra que la función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(v) = \lim_{m\to\infty} A^m v$ existe.
- Demuestra que T es una transformación lineal (puedes asumir en inciso anterior aunque no lo hayas probado).
- Demuestra que T es la proyección ortogonal sobre V_1 (el subespacio vectorial asociado a valor propio 1).

Problema 4. Sea V un espacio vectorial real de dimension finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal con polinomio característico $p(x) = (x-3)^6(x-2)^3(x-1)^2$ y polinomio mínimo $m(x) = (x-3)^3(x-2)^2(x-1)$.

(i) Calcula $\det(T)$ y $\det(e^T)$.
(ii) Calcula todas las posibles formas canónicas de Jordan que la matriz asociada a T puede tener.

Problema 5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo K. Sea T un endomorfismo de V. Demuestra que V se puede descomponer de forma unica como $V_0 \oplus V_1$ de tal manera que $T(V_0) \subseteq V_0$, $T(V_1) \subseteq V_1$, $T_{|V_0}$ es nilpotente y $T_{|V_1}$ es invertible.
Pista: Mira las potencias de T; en particular, T^n.