Ecuaciones diferenciales ordinarias | Examen general
Enero de 2015

INSTRUCCIONES: Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa tus respuestas en la esquina superior izquierda. Escribe tu nombre en cada una de tus hojas de respuestas.

Calificación mínima para aprobar: 7.5

1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene al origen. Define la función matriz-valuada $\boldsymbol{A} : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que para cada $t \in I$, $\boldsymbol{A}(t)$ es una matriz $n \times n$ de coeficientes reales. Si $\boldsymbol{x_0}$ es un vector constante de $\mathbb{R}^n$, demuestra que el sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0},$$

tiene una solución particular definida para todo $t \in I$. ¿Puedes garantizar la unicidad de dicha solución? Explica.

2. Encuentra la solución general a

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2^2. \end{aligned}$$

Demuestra que

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_3 = -\frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{6}x_1^2 x_2 - \frac{1}{30}x_1^4\}$$

y

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1 = x_2 = 0\}$$

son conjuntos (locales) estable e inestable respectivamente.

4. Dado el sistema

$$\dot{x} = -x - \frac{y}{\log(r)}$$
$$\dot{y} = -y + \frac{x}{\log(r)},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, muestra que $(0, 0)$ es un punto crítico simple, y muestra que es un espiral.

5. Usa una función de Lyapunov para estudiar la estabilidad de la solución estacionaria $(0, 0)$ del siguiente sistema

$$\dot{x} = -4y + x^3$$
$$\dot{y} = 4x + y^3$$