Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I

Examen General

CIMAT - Julio 2017

INSTRUCCIONES:

- **Escribe tus respuestas sólo en un lado de las hojas blancas que se te entregarán.**
- Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito.
- Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa tus respuestas en la esquina superior izquierda.
- Escribe tu nombre en la parte superior derecha en cada una de las hojas que uses.
- Todos los problemas valen lo mismo. La calificacion mínima para aprobar es 8.

---

1. Considera el sistema de ecuaciones
$$x' = Ax \tag{1}$$
donde
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}$$
y k, b son constantes reales.

   (a) Da condiciones en k y b para que el origen sea un foco estable.

   (b) Determina condiciones en k y b para que tanto el espacio estable como el inestable asociados al sistema sean no triviales.

   (c) Demuestra que si k y b son constantes positivas entonces no existen soluciones $x(t)$ de (1) tales que $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$.

   Sean $k = 2$ y $b = 3$.

   (d) Determina la solución explícita del sistema con la condición incial $x_0 = (1, -2)^T$.

   (e) Determina la naturaleza del punto de equilibrio en el origen y bosqueja el retrato fase.

2. Resuelve el sistema
$$x' = -x$$
$$y' = y + x^2$$
y demuestra que
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2/3\} \qquad \text{y} \qquad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$
son las variedades estable e inestable, respectivamente, del origen. Decide si S y U son las variedades globales.

3. Sea $c \in \mathbb{R}$. Considera el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 + y^2 \\ y' &= x + cxy. \end{aligned}$$

   (a) Encuentra los puntos de equilibrio para cada valor de c. Decide si hay puntos de equilibrio hiperbólicos y, en tal caso, determina si son pozos, fuentes o sillas.

   (b) Determina si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que el sistema sea Hamiltoniano y, en tal caso, determina la función Hamiltoniana.

4. Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Supón que el sistema gradiente $x' = -\nabla f(x)$ tiene un único punto crítico x_0 y que este punto es un mínimo global de f. Demuestra que el sistema no puede tener soluciones periódicas no triviales.

5. Demuestra que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 0, 0)$ es un punto de equilibrio estable del sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_2' &= x_4 \\ x_3' &= -2(x_1 - 1) \\ x_4' &= -8(x_2 - 2)^3. \end{aligned}$$