**EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA LINEAL**
**Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT**
**viernes 8 de enero de 2016**

1. Resuelve el problema de mínimos cuadrados $\min_x ||Ax-b||^2$ donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la suma de cada uno de sus renglones es uno:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, ..., n.$$
Demuestra que $\det(A - I) = 0$.
3. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   *a*) Calcula la forma canónica de Jordan $J$ de $A$.
   *b*) Calcula una matriz invertible $Q$ tal que $Q^{-1}AQ = J$.
   *c*) Calcula $e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, la exponencial de la matriz $tA$.
   *d*) Resuelve la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con condición inicial $x(0) = (1, 1, 1)$.
4. Para $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se define *la transpuesta hermitiana* $A^H$ de $A$ como $A^H = (a_i^j)^H = (\overline{a_j^i})$, donde $\overline{z} = a - ib$ denota al conjugado de $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
   Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^H = -A$ y sea $B = \exp(A)$. Demuestra que:
   *a*) $\det(B) = e^{tr(A)}$.
   *b*) $B^H = \exp(-A)$.
   *c*) $BB^H = I_{n\times n}$, la matriz identidad.
   Sugerencia: Demuestra que $A$ es normal, es decir, que $A^H A = AA^H$.
5. Determina para qué valores de $a, b$, y $c \in \mathbb{R}$ se satisface la siguiente desigualdad:
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq x^2 + y^2.$$