Examen General de Modelación I

Julio 7, 2015

INSTRUCCIONES: Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y escribe tu nombre en cada una de tus hojas de respuestas.

1. Considera el oscilador armónico

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku &= F_0 sen(\omega t), \\ u(0) = u_o, \quad \dot{u}(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{1}$$

   Adimensionaliza, si

   $F_0 \neq 0, \quad u_0 \neq 0, \quad v_0 \neq 0.$

2. Sean S_j y D_j la oferta y demanda de un bien en la semana j, y sea P_j el precio de tal bien en la semana j. Supongamos que existen constantes positivas a, b y c tal que

$$S_j = aP_{j-1}, \quad D_j = b - cP_j.$$

   (a) Encuentra P_j, si la demanda siempre es igual a la oferta.

   (b) Muestra que P_j converge a $b/(a+c)$ cuando $j \to \infty$ si $a/c < 1$.

   (c) Muestra que $P = b/(a+c)$ es un punto de equilibrio. Describe en términos económicos.

3. Considera el problema de soltar una roca verticalmente de una altura h. La ecuación exacta de movimiento es

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{(R+r)^2},$$

   y la aproximada

$$\ddot{r} = -g,$$

   $g = (GM)/R^2$. Ambas con condiciones iniciales $r(0) = h$, $\dot{r}(0) = 0$.

   (a) Resuelve la ecuación aproximada. Calcula el tiempo que tarda en chocar con el piso.

   (b) Cómo se compara el tiempo de choque con el de la ecuación exacta?

   (c) Estima la diferencia entre ambas soluciones.

4. Resuelve la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = Ay_n + B, \quad y_0 = 0.$$

5. Considera le modelo

$$\Delta P = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) - sPQ$$

$$\Delta Q = -\mu Q + vPQ,$$

donde $r, k, s, \mu, v > 0$. Encuentra los puntos de equilibrio y determina la estabilidad de alguno de ellos. Explica.

6. Considera el modelo SIR

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\
\frac{dR}{Dt} &= \gamma I.
\end{aligned}$$

$S + I + R = 1.$

   (a) Deriva y explica el fenómeno umbral.

   (b) Supongamos que eventualmente ya no hay infectados. De la primer y tercer ecuación deriva la ecuación de "epidemic burnout":

$$1 - R_\infty = S(0)exp\left(-R_\infty R_0\right).$$