Examen General de Modelación

Enero 13, 2015

INSTRUCCIONES: Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa tus respuestas en la esquina superior izquierda. Escribe tu nombre en cada una de tus hojas de respuestas.

Elije y resuelve completamente cualesquiera cuatro ejercicios. La duración del examen es de 4 horas.

1. Considera el modelo del crecimiento de una población definido por los siguientes eventos

Evento	Propensidad	Estequiometría
nacimiento	$\alpha_1(x) = c_1 x(1 - \frac{x}{K})$	$\bar{v}_1 = 1$
muerte	$\alpha_2(x) = c_2 x$	$\bar{v}_2 = -1$

Modifica la lista de eventos para incluir depredación (No es necesario incluir explícitamente una población de depredadores). Analiza cualitativamente la ecuación de campo medio resultante.

2. Escribe un modelo de un sistema presa depredador de tiempo discreto. Determina si tiene puntos estacionarios. En caso afirmativo estudia su estabilidad.

3. Modifica el modelo Lotka-Volterra para que describa el hecho de que un porcentaje fijo, k, de los depredadores encuentra un refugio en el cual no puede ser alcanzado por el depredador. Analiza y discute el comportamiento de las soluciones y su interpretación biológica.

4. En el modelo Kermack y Mckendrick, agrega un término que modele el aprendizaje por parte de los susceptibles. Analiza el sistema y da la interpretación epidemiológica de los resultados obtenidos.

5. Imagine que tiene \$5,000 para invertir y que tendrá la oportunidad de hacerlo en cualquiera de las dos inversiones (A o B) al principio de cada uno de los próximos tres años. Existe incertidumbre respecto al rendimiento de ambas inversiones. Si invierte en A, puede perder todo el dinero o (con probabilidad más alta) obtener \$10,000 (una ganancia de \$5,000) al final del año. Si invierte en B, puede obtener los mismos \$5,000 o (con probabilidad más baja) \$10,000 al final del año. Las probabilidades con las que suceden estos eventos son las siguientes:

Inversión	Cantidad obtenida	Probabilidad
A	0	0.3
	$\$10,000	0.7
B	$\$5,000	0.9
	$\$10,000	0.1

Se le permite hacer (a lo sumo) una inversión al año y sólo puede invertir \$5,000 cada vez. (Cualquier cantidad adicional de dinero acumulada es inútil). Encuentra la política de inversión que maximice la probabilidad de tener por lo menos \$10,000 después de los 3 años.

6. Una gasolinera cuenta con una bomba de gasolina. Los automóviles que desean cargar llegan según un proceso de Poisson a una tasa media de 15 por hora. Sin embargo, si la bomba está en uso, los clientes potenciales pueden desistir (ir a otra gasolinera). En particular, si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es n/3, para n=1,2,3. El tiempo necesario para servir un auto tiene distribución exponencial con media de 4 minutos.

Encuentra la probabilidad p_k de que se encuentren exactamente k autos ($k = 0, 1, 2, 3$) en la gasolinera.