CIMAT | Examen General | Enero 13, 2015

Variable Compleja I

Resuelve todos los problemas y justifica cabalmente tus soluciones. Para aprobar, es necesario contestar correctamente cuatro de los seis problemas.

1. Denota por log la rama principal del logaritmo ($-\pi < \arg(z) < \pi$) y define $f(z) = \log(z^3 + 1)$. Encuentra el abierto más grande en el cual f es analítica.

2. Sea Ω un dominio no vacío del plano complejo y considera $f_n : \mathbb{C} \to \Omega$ una sucesión de funciones analíticas que converge punto a punto. Si definimos $f(z) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(z)$, ¿es f holomorfa?

3. Si $f : \mathbb{C} \to \{z \,|\, \mathrm{Im}(z) > -3\}$ es analítica, verifica que f es una función constante.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío y f una función holomorfa definida sobre U. Si F denota la antiderivada holomorfa de f en U, muestra con un ejemplo que F no tiene por qué tener una antiderivada holomorfa en U.

5. Calcula la integral de línea
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3(z-1)^2(z+2)} dz$$
donde γ es la frontera con orientación positiva del disco $|z-1| \le 2$.

6. Sea f una función analítica definida sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demuestra que si γ es un círculo centrado en z_0 y de radio suficientemente pequeño, entonces
$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_\gamma \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$