Examen General de Variable Compleja, Enero 2018.

Contesta los problemas con justificaciones completas.
Se necesitan **al menos cinco problemas** completos bien resueltos para aprobar el examen.

Notación: Ω es un abierto, no vacío en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Problema 1: Clasificar el tipo de la singularidad de $f(z)$ en $z=0$ y evaluar $\int_\gamma f(z)dz$ (donde γ es el círculo en $\mathbb{C}$ de radio 1, con centro $z=0$ y con orientación positiva) en cada caso:

$$a)\ f(z)=\frac{\cos(3z)}{7z^4} \qquad b)\ f(z)=e^{3/z} \qquad c)\ f(z)=\frac{\operatorname{sen}(5z)}{2z}$$

Problema 2: Demostrar el Teorema Fundamental de Álgebra.

Problema 3: Usando el cálculo de residuos calcular

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Problema 4:
a) Definir *función meromorfa* en Ω.

Notación: $\mathcal{M}(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones meromorfas en Ω con suma y producto de un par de funciones definidos puntualmente.

b) Si Ω es conexo, demostrar que $\mathcal{M}(\Omega)$ es un campo.
¿Qué pasa si Ω no es conexo?

Problema 5: Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analíticas tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente en cada compacto de Ω.
a) Demostrar que f es analítica en Ω.
b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}$ uniformemente en cada compacto de Ω para todo entero $k \geq 1$, donde $g^{(k)}$ es la k-ésima derivada de la función g.

Problema 6:
a) Definir $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ usando series de potencias.

b) Encontrar el radio de convergencia de estas dos funciones.
c) Usando las definiciones en a) demostrar que

$$\frac{d}{dz}\text{sen}(z) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}\cos(z) = -\text{sen}(z).$$

d) Probar: $\cos^2(z) + \text{sen}^2(z) = 1$. **Sugerencia:** Sin usar series de potencia.

Problema 7: Demuestra que toda transformación lineal fraccionaria que toma valores reales sobre los números reales puede expresarse de la forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc \neq 0$.

Problema 8: Analiza los ceros y polos de la función $f(z) = \text{sen}(z)/(z-1)$ en el interior del disco $|z| = 4$ y utiliza esto para demostrar, sin hacer cálculo de residuos, que

$$\int_{|z|=4} \frac{(z-1)\cot(z) - 1}{(z-1)} dz = 2\pi i.$$