

INSTRUCCIONES: Asegurate de justificar adecuadamente todas tus respuestas. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa las hojas de soluciones en la esquina superior izquierda.

1. (10 pts) Una esfera de radio r y densidad ρ cae a una velocidad constante v bajo la acción de la gravedad g en un líquido de densidad ρ_l y viscosidad μ . Se ha observado que

$$v = \frac{2}{9} r^2 \rho g \mu^{-1} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho} \right)$$

¿Es esta ley libre de unidades?

2. (10 pts) Una barra uniforme de masa m y longitud l esta conectada por una junta a un poste que rota con una velocidad angular w . La ecuación diferencial para el ángulo de separación θ es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{3g}{2l} - w^2 \right) \sin(\theta) = 0$$

donde g es la constante de gravedad. Determine dos escalas para el movimiento y escriba cada ecuación diferencial usando cada uno de las escalas.

3. (30 pts) Dar una aproximación uniforme al problema

$$\epsilon y'' - y' = 2t, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

con $y(0) = y(1) = 1$.

4. Encuentre los puntos críticos para el funcional

$$\int_a^b (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx$$

5. Encuentre los extremos para

$$J(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2) dx, \quad y(0) = y(1) = 0 \quad \text{sujeto a} \quad \int_0^1 (y^2) = 2 dx$$