EXAMEN GENERAL : ANÁLISIS FUNCIONAL

Sólo hay que resolver 6 de los 8 ejercicios.
Cada ejercicio vale 10 puntos.
Para aprobar se requiere obtener al menos 42 puntos.
Duración: 3 horas.

1. Sean V y W espacios vectoriales, $Z \subset W$ un subespacio vectorial y $T : V \to W$ un operador lineal. Si $\dim N(T) < \infty$ y $\dim Z < \infty$, prueba que $\dim T^{-1}(Z) < \infty$.

2. Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no-vacío, $X := C(K, \mathbb{R})$ y $g \in X$. Prueba que $A := \{f \in X : f(x) < g(x),\ \forall\, x \in K\}$ es abierto en X.

3. Sea $f(x) := x^{-\frac{1}{2}}, \forall x > 0$ y $f(0) = 0$. Prueba que $f \in L^1([0,1])$ y que en su clase de equivalencia no hay funciones Riemann-integrables en $[0,1]$.

4. Sea X el subespacio vectorial de $C([0,1], \mathbb{R})$ formado por todas las funciones que son de clase C^1, y provisto con la norma del supremo. Definamos $\varphi : X \to \mathbb{R}$ por $\varphi(f) = f'(0)$. Determina si φ es continuo.

5. Sea $1 \leq p < \infty$. Dada una función $f \in L^p(0,1)$, definamos la función $Tf : [0,1] \to \mathbb{K}$ por $Tf(x) := \int_0^x sf(s)ds$. Prueba:
i) Tf está bien definida. ii) Tf es continua.
iii) $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ es un operador lineal acotado.

6. Observa que $\|\cdot\|_\infty$ es también una norma en ℓ^1 y prueba que no es equivalente con $\|\cdot\|_1$.

7. Sea χ la función característica del intervalo $[0,1)$ y, para cada $k \in \mathbb{Z}$, definamos $\varphi_k(x) := \chi(x-k),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
i) Verifica que $B := \{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.
ii) Determina si B es una base ortonormal.

8. Fijemos $p \in (1, \infty)$. Supongamos que b es una sucesión en $\mathbb{K}$ tal que $bx \in \ell^1,\ \forall x \in \ell^p$ y definamos $T : \ell^p \to \ell^1$ por $Tx := bx$. Prueba que T es un operador lineal acotado. (Sug.: considera el teorema de la gráfica cerrada.)

Enero 14, 2015