EXAMEN GENERAL : ANÁLISIS 2

Resuelve primero los ejercicios que consideres más sencillos.
Cada ejercicio vale 10 puntos.
Para aprobar se requiere obtener al menos 50 puntos.
Duración: 4 horas.

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto (Lebesgue) medible y $f : \Omega \to [0, \infty]$. Si $D \subset \mathbb{R}$ es un conjunto denso y $\{x \in \Omega : y \leq f(x)\}$ es medible para cada $y \in D$, prueba que la función f es medible.

2. Determina si $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función característica de los números racionales, es Borel-medible.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ una función medible y supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f_n \to f$ puntualmente c.t.p. y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f_n \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}$, prueba que $\int_{\mathbb{R}} f \leq M$.

4. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $f_n \to f$ uniformemente en Ω y $m(\Omega) < \infty$, prueba que f es integrable y

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable, prueba que F dada como

$$F(x) := \int_{(-\infty, x)} f(s)ds$$

está bien definida y es continua.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es integrable y $\epsilon > 0$, prueba que existe un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con medida finita y tal que $\int_\Omega f > \int_{\mathbb{R}^n} f - \epsilon$.

7. Dado un conjunto (Lebesgue) medible $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, el *cono con base* en Ω es el conjunto $C := \{(1-t)(x, y, 0) + t(0, 0, 1) : (x; y) \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$. Prueba que C es medible y calcula su medida $\mathrm{m}(C)$ en términos de $\mathrm{m}(\Omega)$.

8. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto (Lebesgue) medible y $f : \Omega \to [0, \infty)$. Si el conjunto $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, y \leq f(x)\}$ es medible en $\mathbb{R}^2$, prueba que la función f es medible. (Sug.: considera el teorema de Tonelli.)

Martes 6 de julio, 2015