EXAMEN GENERAL : ANÁLISIS 2

Resuelve primero los ejercicios que consideres más sencillos.
Cada ejercicio vale 10 puntos.
Para aprobar se requiere obtener al menos 50 puntos.
Duración: 4 horas.

1. Sean X un conjunto, Σ una σ-álgebra en X y $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ una medida finitamente aditiva. Prueba que μ es una medida si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ para cualquier colección $\{A_n\} \subset \Sigma$ tal que $A_n \subset A_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $\mathcal{A}$ la colección de uniones finitas de conjuntos de la forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Prueba:

i) $\mathcal{A}$ es un álgebra en $\mathbb{Q}$.

ii) La σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es $2^{\mathbb{Q}} := \{A : A \subset \mathbb{Q}\}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ una función tal que $f(x, \cdot)$ es Borel-medible para cada $x \in \mathbb{R}$ y $f(\cdot, y)$ es continua para cada $y \in \mathbb{R}^k$. Dado $n \in \mathbb{N}$ tomemos $a_j := \frac{j}{n},\ j \in \mathbb{Z}$, y para $x \in [a_j, a_{j+1}]$ y $y \in \mathbb{R}^k$ definamos

$$f_n(x, y) := \frac{f(a_{j+1}, y)(x - a_j) - f(a_j, y)(x - a_{j+1})}{a_{j+1} - a_j}.$$

Prueba:

i) Cada función f_n es Borel-medible en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$.

ii) $f_n \to f$ puntualmente.

4. Consideremos $0 < a < b$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función

$$f_n(x) := ae^{-nax} - be^{-nbx}, x \in \mathbb{R}.$$

Prueba:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|dx = \infty$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = 0$.

5. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{N}$ y consideremos $f, f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Prueba que $f_n \to f$ en medida si, y sólo si, $f_n \to f$ uniformemente.

6. Sea $E := [0,1] \times [0,1]$. Investiga la existencia e igualdad de las integrales $\int_E f dm^2$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ y $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ para $f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

7. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto (Lebesgue)medible y m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Si $0 \leq y \leq m(E)$, prueba que existe $D \subset E$ tal que D es medible y $m(D) = y$.

8. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto (Lebesgue) medible y supongamos que existe $0 < \rho < 1$ tal que para cada intervalo acotado (a,b), donde $a < b$, se cumple que $m(E \cap (a,b)) \leq \rho(b-a)$, donde m es la medida de Lebesgue. Prueba que E tiene medida cero.

Jueves 7 de julio, 2016