1

Examen 2

Para obtener crédito completo en cada pregunta, tendrás que explicar con detalle todas tus afirmaciones, enunciar los teoremas que utilizas,etc.

1. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones C^∞ tales que $f(0,0,0) = g(0,0) = h(0) = 0$, $Df(0,0,0) = (1,2,3)$, $Dg(0,0) = (4,5)$ y $h'(0) = 6$.
Definimos $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como

$DF = \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right]$ $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = f(g(x,y), h(z), f(x, h(x), g(x,x))).$$

Calcula $DF(0,0,0)$.

2. $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, $O \in \operatorname{Im} g$ valor regular de g. $S = g^{-1}(0)$. Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n)$.

a. Prueba que si $s \in S$ es un punto crítico de $f|_S$ entonces existe un λ único, tal que, (s, λ) es un punto crítico de F. Reciprocamente, prueba que si (s, λ) es un punto crítico de F entonces $s \in S$ y s es un punto crítico de $f|_S$.

b. Prueba que si (s, λ) es un punto crítico de F y $D^2F(s, \lambda)$ es positivo definido entonces s es un mínimo local de $f|_S$.

*c. Demuestra que puede suceder que $s \in S$ sea un mínimo local de $f|_S$ pero que (s, λ) no sea un mínimo local de F.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 1$. Prueba que existen intervalos abiertos I, $\mathcal{J}$, conteniendo ambos a 0, y un difeomorfismo C^∞ $\phi : I \to J$, con $\phi(0) = 0$, tal que

$$f \circ \phi(x) = x^3$$

para toda $x \in I$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 sin puntos críticos. Prueba que si U es un abierto en $\mathbb{R}^2$ entonces $f(U)$ es también abierto.

wm

2