EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA, JULIO 2016

- **Grupos** 20 **Puntos**

1. Demostar que todo grupo de orden 15 es ciclico.
2. Describir todos los grupos de orden $2p$ en donde p es un número primo.
3. Sea G un grupo y H un subgrupo. Demuestra que
$$(G : H)(H : 1) = (G : 1)$$
y da dos consecuencias de este teorema.

- **Anillos** 40 **puntos**

1. Demostrar que $3, 2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{(-5)}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{(-5)}]$.
2. Demostar que un anillo entero principal es de factorización única. Da un ejemplo de un anillo que no es de factorización única.
3. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Sea $a \in R$ y m, n dos enteros positivos. Denotamos por $d = (m, n)$ al máximo común divisor de n y m. Demuestra que el ideal de R generado por $((a^n - 1), (a^m - 1))$ es igual al ideal generado por $(a^d - 1)$ en R.
4. Sea A un anillo comutativo con unidad y $\mathcal{N}$ los elementos nilpotetntes. Demostrar que
   - $\mathcal{N}$es un ideal de A
   - $\mathcal{N}$ es la intersección de los ideales primos de A.
   - El anillo cociente $A/\mathcal{N}$ no tiene elementos nilpotentes.

- **Módulos** 30 **puntos**

1. Sea R un anillo entero principal y M un R-módulo. Demostar que si M es módulo finitamente generado entonces todo submodulo M' es finito generado.
2. Demuestra que un R-módulos sobre un campo es libre.
3. Da dos ejemplos de módulos que no sean libres.

- **Representaciones** 20 **puntos**

1. Demostar que toda matrix de orden finito en $GLn(\mathbb{C})$ es diagonalizable.
2. Sea G un grupo abeliano finito. Demostar que todo caracter de G es uno dimensional y que el numero de caracteres irreducibles es igual al order del grupo.