6

ANALISIS-EXAMEN GENERAL

DURACION: 4 HORAS

IMPORTANTE: La cali¿cacisn mmima aprobatoria para este examen es de 90 puntos, los cuales deberan obtenerse de acuerdo a la siguiente restriccisn:

Se podran escoger a lo mas dos ejercicios para resolver entre los ejercicios numerados como 1,2 y 3. Cada alumno debera escribir explmitamente cuales de esos tres ejercicios escogis.

1.

1.1. (5 puntos). Probar que la funcisn

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\frac{1}{x} \end{array}$$

no se puede extender a una funcisn continua $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1.2. 5 (puntos). Probar que la funcisn

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{l} x\sin\frac{1}{x},\ \text{si } x\neq 0 \\ 0,\ \text{si } x=0 \end{array} \end{array}$$

es continua pero no es derivable en cero.

1.3. (5 puntos). Probar que la funcisn

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{l} x^2\sin\frac{1}{x},\ \text{si } x\neq 0 \\ 0,\ \text{si } x=0 \end{array} \end{array}$$

es derivable en cero pero su derivada no es continua en cero.

1.4. (5 puntos). Generalizar lo anterior para la funcisn

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{l} x^n\sin\frac{1}{x},\ \text{si } x\neq 0 \\ 0,\ \text{si } x=0 \end{array} \end{array}$$

2.

2.1. (5 puntos). Probar que el grafo de una aplicacisn continua de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ es cerrado.

2.2. (10 puntos). Probar con un contraejemplo que el recrproco es falso.

2.3. (10 puntos). Probar que si se supone ademas que la aplicacisn es acotada, entonces el recrproco es cierto.

3.

(15 puntos). Sea E, d un espacio mi trico no-vacm y completo, y $f\colon \longrightarrow E$ tal que

$$\exists \lambda \in [0,1[,\ \forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y).$$

Probar que existe un znico $x \in E$ tal que $f(x) = x$.

4.

4.1. (10 puntos). Probar que el conjunto $GL_n(\mathbb{R})$ de las matrices inverti-bles es abierto en el conjunto $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales $n \times n$, considerado con una norma cualquiera.

imagen inversa del determinante distinto de cero y el determ. es continua

4.2. (10 puntos). Probar que el conjunto $O_n(\mathbb{R})$ de las matrices ortogo-nales (es decir, las matrices M tales que $M^t M = I_d$) es compacto con la topologia inducida por una norma cualquiera en $M_n(\mathbb{R})$.

con la norma cual ~~usual $\|I\|=1$~~ ~~luego~~ la esfera en las matrices es compacto y $O_n(\mathbb{R})$ es cerrado dentro de la esfera pues $\|M^t M\| \leq \|I_d\| = k$ $\Rightarrow \|M\|^2 \leq k$

4.3. (10 puntos). Probar que $O_n(\mathbb{R})$ no es conexo con dicha topologm.

$U = \det < 0$
$V = \det > 0$
$U \cap V = \phi$
$O_n(\mathbb{R}) \cap V \neq \phi$ pues tiene ident.
y $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in U$

5.

Sólo falta $f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$

5.1. (5 puntos). Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(tx) = t f(x).$$

Probar que f es lineal.

5.2. (10 puntos). Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 tal que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(tx) = t f(x).$$

Probar que f es lineal e igual a su derivada en cero.

5.3. (15 puntos). Probar que lo anterior puede ser falso si f es ssl o con-tinua.

6.

6.1. (5 puntos). Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y de¿namos

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Probar que

$$g'(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,y)\,dy,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

6.2. (10 puntos). Sea

$$g(x) = \int_0^1 e^{2xy}\,dy. = \frac{1}{2x} e^{2xy} \Big|_0^1 = \frac{1}{2x}(e^{2x} - 1)$$

Prueba que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ es un homeomor¿smo.

$y = \frac{1}{2x}(e^{2x} - 1)$

4