EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA LINEAL

El examen consta de tres partes y tiene una duración de 4 horas. Los problemas en las primeras dos partes tienen un valor de 10 puntos. El problema en la Parte III se calificará como S (Suficiente), o NS (No suficiente). Para aprobar es necesario tener una calificación mayor o igual que 56 puntos en las primeras dos partes y calificación de S en la tercera. Para recibir crédito es necesario justificar las respuestas.

Parte I. Resuelve los siguientes problemas.

1. Considera las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

   Muestra que la ecuación matricial $AX = B$ tiene una solución sí y solo si $\alpha = -1$.

2. Diagonaliza en base ortonormal la matriz siguiente

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Muestra que la matriz siguiente es una rotación, da su eje y su ángulo. Orienta el eje de tal manera que el ángulo este en $[0, \pi]$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4. Sea A una matriz de 3×3 tal que sus valores propios son $0, \lambda_1, \lambda_2$, con $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Supongamos que v_0, v_1, v_2 son los vectores propios respectivos.

   (a) Describe $Ker\, A$, $\operatorname{Im} A$

   (b) Resuelve la ecuación $Ax = v_1 + v_2$

   (c) Explica si $Ax = v_0$ tiene solución.

5. Sea B una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$, tal que $B(x,x) > 0$ para toda $x \neq 0$. Construye una base en $\mathbb{R}^n$ en la que la matriz tenga la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & R_1 & & & & & & \\ -C_1 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & R_r & & & \\ & & & -C_r & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

← este no viene

Sugerencia: Considera la descomposición $B = B_s + B_a$ donde

$$B_s = \frac{1}{2}\left(B(x,y) + B(y,x)\right)$$

$$B_a = \frac{1}{2}\left(B(x,y) - B(y,x)\right)$$

Parte II. Resuelve sólo tres de los siguientes problemas.

1. Calcula A^{30}, B^{20} si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Sea A una matriz con valores propios 0, 1. Si los vectores propios respectivos son $(1\,,\,2)^t$, $(2\,,\,-1)^t$ responde las siguientes preguntas:

   (a) ¿Cómo se puede concluir que A es simétrica?

   (b) ¿Cual es su traza y determinante?

   (c) ¿Quién es A?

en los complejos No utilizo F can. Jordan

3. ¿Existe una matriz A tal que la familia $A + cI$ es invertible para todo número c?

4. Sean $x_1, x_2, \dots, x_k$ vectores propios correspondientes a los valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Mostrar que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ son linealmente independientes.

5. Dar la forma de Jordan de la matriz siguiente, y una base en que tenga esta forma

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

6. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n, demuestra que V se puede considerar como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2n$.

Parte III. Resuelve el siguiente problema.

1. Escribe un resumen de a lo más dos cuartillas mencionando las principales definiciones y teoremas del curso.