Examen General de Álgebra Moderna'

Julio de 2011

Lea **cuidadosamente** todos los ejercicios **antes** de comenzar a resolver el examen.

Se necesita resolver *correctamente* cuatro ejercicios*completos* para aprobar el examen. Resuelva al menos uno de cada bloque.

Grupos

Ejercicio 1. Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Para cada $x \in G$ definimos

$$xH := \{x \bullet a \mid a \in H\}.$$

i) Demuestre que si G es un grupo finito; entonces $|xH| = |yH|$ para todo $x, y \in G$.
ii) Demuestre que $xH \cap yH \neq \emptyset$ si y sólo si $xH = yH$.
iii) Demuestre que $G = \bigcup_{x \in G} xH$.
iv) Demuestre que $|H|$ divide a $|G|$ (teorema de Lagrange).

Recuerde que un subgrupo H de un grupo G es un subgrupo característico si para todo automorismo ϕ de G se cumple que $\phi(H) = H$.

Ejercicio 2. Si G es un grupo abeliano de orden $p^r n$ con p un primo que no divide a n y H es un subgrupo de G de orden p^r, demuestre que H es un subgrupo característico.

Ejercicio 3. Sea G un grupo de orden p^3, con p primo, y suponga que $|Z(G)| \geq p^2$; demuestre que en tal caso G es abeliano. ¿Es posible generalizar este resultado? En caso afirmativo, demuéstrelo.

Anillos .

Ejercicio 4. Sea K un campo, demuestre que todo polinomio $f \in K[x]$ de grado d tiene a lo más d raíces.

Ejercicio 5. Demuestre que todo dominio euclidiano es un dominio de factorización única.

Sugerencia: Use el algoritmo de la división para demostrar que todo dominio euclidiano es un dominio de ideales principales.

Ejercicio 6. Demuestre que si R es un anillo simple, entonces la característica de R es o bien cero o bien un número primo.

Módulos .

Ejercicio 7. De un ejemplo de un anillo noetheriano que no sea principal.

Ejercicio 8. Determine si $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano o no.

Ejercicio 9. Sean R un anillo, M un R-módulo, $p \subset R$ un ideal primo y $S = R - p$ el sistema multiplicativo correspondiente. Definimos $M_p := S^{-1}M$ como sigue:

$$M_p := \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}/$$

donde $(m, s)\ (m', s')$ si y sólo si existe $t \in s$ tal que $t(ms' - m's) = 0$.

a) Demuestre que M_p es un R_p módulo.
b) Demuestre que si M es un R-módulo noetheriano, entonces M_p es un R_p-módulo noetheriano.
c) Concluya que si R es un anillo noetheriano, entonces R_p también es un anillo noetheriano.