Examen General de Álgebra Moderna

Enero de 2012

Lea **cuidadosamente** todos los ejercicios **antes** de comenzar a resolver el examen. Para aprobar el examen es necesario resolver **bien** al menos cinco ejercicios.

Ejercicio 1. Sean G y H dos grupos, $\phi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo de grupos y $N < G$ un subgrupo normal. Demuestre que $\phi(N) < H$ es un subgrupo normal.

Ejercicio 2. ¿Cuántos grupos abelianos no isomorfos de orden144 hay?

Ejercicio 3. Sea G un grupo de orden $|G| = pq^2$ con p y q primos tales que $p < q$. Demuestre que G tiene un subgrupo normal de orden q^2

Ejercicio 4. Un anillo R se dice de *factorización única* si todo elemento $x \in R$ se puede escribir de manera única (salvo multiplicación por unidades) como

$$x = y_1^{h_1} \cdots y_k^{h_k}$$

con $y_1, \cdots, y_k \in R$ elementos irreducibles.
a) Escriba la definición de *dominio euclidiano*
b) Demuestre que todo dominio euclidiano es un dominio de factorización única.
Sugerencia: demuestre que todo dominio euclidiano es un dominio de ideales principales.

Ejercicio 5. Recuerde que un ideal $I \subset R$ se dice un *ideal primo* si para todo $x, y \in R$, $xy \in I$ si y sólo si $x \in I$ o $y \in I$. Recuerde también que un anillo R se dice un *dominio entero* si para todo $x, y \in R$ se cumple $xy = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $y = 0$.

Demuestre que $I \subset R$ es un ideal primo si y sólo si R/I es un dominio entero.

Ejercicio 6. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz $n \times n$ sobre R. Demuestre que A es invertible si y sólo si $det\ (A) \in R$ es una unidad.

Ejercicio 7. Determine si $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano o no.