Examen General de Álgebra Moderna

Enero de 2013

Lea **cuidadosamente** todos los ejercicios **antes** de comenzar a resolver el examen. Para aprobar el examen es necesario resolver **bien** al menos cinco ejercicios.

Ejercicio 1. Sean τ y τ' dos números complejos con parte imaginaria estrictamente positiva y sean $\Lambda := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, $\Lambda' := \mathbb{Z} \oplus \tau'\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ dos retículos.

(a) Demuestre que $(\Lambda, +)$ y $(\Lambda', +)$ son subgrupos de $(\mathbb{C}, +)$.

(b) Concluya que $(\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, +)$ es un grupo abeliano.

(c) Demuetre que si $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de grupos aditivos, entonces ϕ induce un homomorfismo de grupos $\bar{\phi} : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \to \frac{\mathbb{C}}{\Lambda'}$ si y sólo si $\phi(\Lambda) \subset \Lambda'$.

Ejercicio 2. ¿Cuántos grupos abelianos no isomorfos hay que tengan orden p^2, donde p es un primo?

Ejercicio 3. Sea K un campo, demuestre que todo polinomio $f \in K[x]$ de grado $d > 0$ tiene a lo más d raíces.

Ejercicio 4. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz $n \times n$ sobre R. Demuestre que A es invertible si y sólo si $det\ (A) \in R$ es una unidad.

Ejercicio 5. Sean R un anillo, M un R-módulo, $p \subset R$ un ideal primo y $S = R - p$ el sistema multiplicativo correspondiente. Definimos $M_p := S^{-1}M$ como sigue:

$$M_p := \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}/\sim$$

donde $(m, s) \sim (m', s')$ si y sólo si existe $t \in S$ tal que $t(ms' - m's) = 0$.

a) Demuestre que M_p es un R_p-módulo.
b) Demuestre que si M es un R-módulo noetheriano, entonces M_p es

un R_p-módulo noetheriano.
c) Concluya que si R es un anillo noetheriano, entonces R_p también es un anillo noetheriano.

Ejercicio 6. Demuestre que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos y p es un ideal primo de R, entonces

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R R_p \longrightarrow M \otimes_R R_p \longrightarrow M'' \otimes_R R_p \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ejercicio 7. Sea G un grupo finito y V un espacio vectorial real de dimensión finita. Demuestre que si

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ & & \\ (g, v) & \mapsto & g \cdot v \end{array}$$

es una acción de G en V, entonces existe un producto interno $< \ , \ >$ en V que es G invariante, es decir, que satisface

$$< g \cdot v, g \cdot w > = < v, w >,$$

para todo $g \in G$ y para toda pareja $v, w \in V$. ¿Cuál será una condición necesaria para poder afirmar algo semejante en el caso de un grupo infinito?

Ejercicio 8. Demuestre que si G es un grupo finito, entonces toda representación real $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es totalmente indescomponible, es decir

$$V \cong \oplus_i W_i$$

donde los W_i son subespacios vectoriales reales G invariantes tales que las representaciones inducidas

$$\rho_i : G \longrightarrow W_i$$

son representaciones irreducibles.