Examen General de Álgebra Moderna

Julio de 2012

Lea **cuidadosamente** todos los ejercicios **antes** de comenzar a resolver el examen. Para aprobar el examen es necesario resolver **bien** al menos cuatro ejercicios.

Ejercicio 1. Sean A y B dos subgrupos de un grupo abeliano G. Demuestre que

$$AB := \{ab \in G \mid a \in A, b \in B\}$$

es un subgrupo de G.

Encuentre un contraejemplo a esta afirmación para un grupo G no abeliano.

Ejercicio 2. Recuerde que si G es un grupo abeliano, entonces el conjunto $Tor(G)$ de elementos de G de orden finito es un subgrupo de G. Sean G un grupo abeliano finitamente generado y suponga que G tiene elementos de orden infinito. Demuestre que existe un subgrupo $H < G$ tal que todos sus elementos son de orden infinito y además $G = H \oplus Tor(G)$.

Ejercicio 3. Sea K un campo, demuestre que todo polinomio $f \in K[x]$ de grado $d > 0$ tiene a lo más d raíces.

Ejercicio 4. Recuerde que un ideal $I \subset R$ se dice un *ideal primo* si para todo $x, y \in R$, $xy \in I$ si y sólo si $x \in I$ o $y \in I$. Recuerde también que un anillo R se dice un *dominio entero* si para todo $x, y \in R$ se cumple $xy = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $y = 0$.

Demuestre que $I \subset R$ es un ideal primo si y sólo si R/I es un dominio entero.

Ejercicio 5. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz $n \times n$ sobre R. Demuestre que A es invertible si y sólo si $det\ (A) \in R$ es una unidad.

Ejercicio 6. Al grupo de simetrías de un polígono regular de n lados se le llama el *grupo diédrico* de orden $2n$ y se le denota como D_{2n}.

a) Demuestre que si n es impar y $a \in D_{2n}$ satisface $ab = ba$ para todo $b \in D_{2n}$, entonces $a = e$, donde e es la identidad del grupo.
b) Demuestre que si n es par entonces existe $a \in D_{2n}$, $a \neq e$, tal que $ab = ba$ para todo $b \in D_{2n}$.
c) Sea n par. Encuentre todos los elementos $a \in D_{2n}$ con la propiedad de que $ab = ba$ para todo $b \in D_{2n}$.
Sugerencia: Recuerde que este grupo está generado por dos elementos α y β tales que $\alpha^n = \beta^2 = e$ y $\beta \circ \alpha \circ \beta = \alpha^{-1}$.

Ejercicio 7. Sea G un grupo cíclico y V un espacio vectorial real de dimensión finita. Demuestre que si $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es una representación irreducible, entonces $dim\ V \leq 2$.
Sugerencia: Encuentre el polinomio característico de $T = \rho(\alpha)$, donde α es un generador de G, y construya un espacio de dimensión ≤ 2 que sea T invariante.