Examen General de Métodos Numéricos

Enero 12, 2015

Instrucciones:

- De los ocho problemas en el examen, deberás seleccionar sólo cinco de ellos para resolver e indicarlos marcando el círculo en la hoja del examen. Sólo esos ejercicios serán calificados.
- En cada ejercicio deberás justificar apropiadamente tu respuesta para recibir el puntaje indicado.
- Para aprobar el examen deben obtener al menos el $80\,\%$ de la suma de los puntajes de los cinco ejercicios seleccionados.
- Empieza cada ejercicio en una hoja nueva. Asegurate de escribir tu clave en todas tus hojas de respuestas.
- El examen tiene una duración de cuatro horas, empezando a las 10:00.

Clave: ____________

○ **Ejercicio 1.** **[2.0 puntos]** Demuestra que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica y definida positiva, resolver el sistema $Ax = b$ equivale a calcular $x = \sum_{i=1}^{n}(c_i/\lambda_i)v_i$ donde λ_i y v_i son los eigenvalores y eigenvectores de A y $b = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$.

○ **Ejercicio 2.** **[2.0 puntos]** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Explica por qué cuando $b = (2001, 2001)^T$, un pequeño cambio $\delta b = (1, 0)^T$ produce una variación muy grande en la solución x, y por otra parte, cuando $b = (1, -1)^T$ una pequeña variación $\delta x = (0{,}001, 0)^T$ induce una variación grande en b.

○ **Ejercicio 3.** **[2.0 puntos]** Sea A una matriz $n \times n$ y $USV^\top$ su descomposición en valores singulares, con $S = diag(s_1, ..., s_n)$, con $s_1 > s_2 > ... > s_n > 0$.

(a) Calcule el número condición $\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$ de la matriz A usando la norma 2 de la matriz,

$$\|A\|_2 := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

donde $\|x\|_2$ es la norma euclidiana de x.

(b) Para $\lambda > 0$, ¿cómo es el número de condición de $A + \lambda I$ en comparación con $\kappa_2(A)$?.

(c) Explique como resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz A.

(d) Para el caso en que A es simétrica, calcule $\kappa_2(A^k)$ para cualquier entero $k > 0$. Si el número de condición de la matriz A es mayor que 1. ¿Cómo es $\kappa_2(A^k)$ en comparación con $\kappa_2(A)$?

◯ **Ejercicio 4. [2.0 puntos]** Sea $f(x)$ una función C^2 en $[a,b]$ que tiene una raíz múltiple x^*.

(a) Muestre que para la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

x^* es una raíz simple.

(b) Aplique el método de Newton-Raphson a la función $g(x)$, para encontrar un método que genere una sucesión $\{x_k\}$ que converja a x^*. Escriba la expresión para generar los puntos x_k en términos de la función $f(x)$ y sus derivadas.

(c) Dado que este método no tiene problemas para obtener raíces, ya sean simples o múltiples, ¿conviene aplicarlo en lugar del método de Newton-Raphson tradicional?. Explique su respuesta.

◯ **Ejercicio 5. [2.0 puntos]** Considere el problema de minimizar la función

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y$$

mediante el método de descenso máximo.

(a) Encuentre las expresiones para generar la secuencia de puntos $\{(x_k, y_k)^\top\}$, tomando el tamaño de paso exacto en la dirección de descenso máximo.

(b) Muestre que cuando se elige a $(0,0)^\top$ como punto inicial del método, la sucesión de puntos $(x_k, y_k)^\top$ cumple con

$$x_{k+1} = \frac{2}{3^k} - 2, \qquad y_{k+1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1.$$

(c) Deduzca cual es el minimizador de $f(x,y)$.

◯ **Ejercicio 6. [2.0 puntos]** Dado un conjunto de puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \cdots, n$ y $x_i < x_j$ para $i < j$, determine los parámetros del *spline de grado 1*, $S(x)$, que se presenta a continuación

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0, \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 x + b_1, \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ S_j(x) = a_j x + b_j, \text{ si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

y que pasa por los puntos (x_i, y_i).

◯ **Ejercicio 7. [2.0 puntos]** Definamos la diferencia centrada como sigue

$$D(h) \stackrel{def}{=} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Se conoce que $D(h)$ tiene una orden $O(h^2)$ de aproximación de la primera derivada de $f(x)$, i.e.

$$D(h) \quad = \quad f'(x) + b_1 h^2 + O(h^4)$$

Encuentre una expresión de aproximación de orden $O(h^4)$ de la primera derivada de $f(x)$.

○ **Ejercicio 8. [2.0 puntos]** Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)),\ t \in [a, b] \\ y(t_0) &= y_0,\ t_0 \in [a, b] \end{aligned}$$

donde la función f tiene derivadas parciales de primer orden continuas.

a) El siguiente algoritmo es conocido como el **método de Heun**:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})) \end{aligned}$$

donde $t_{k+1} \stackrel{def}{=} t_k + h$, y h es una constante positiva.
Si $f(t, y(t)) = \lambda y(t))$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Determine la región de estabilidad del **método de Heun**.