Examen General de Métodos Numéricos

Enero 11, 2016

Instrucciones:

- De los seis problemas en el examen, deberás seleccionar sólo cinco de ellos para resolver e indicarlos marcando el círculo en la hoja del examen. Sólo esos ejercicios serán calificados.
- En cada ejercicio deberás justificar apropiadamente tu respuesta para recibir el puntaje indicado.
- Para aprobar el examen deben obtener al menos el 80% de la suma de los puntajes de los cinco ejercicios seleccionados.
- Empieza cada ejercicio en una hoja nueva. Asegurate de escribir tu clave en todas tus hojas de respuestas.
- El examen tiene una duración de cuatro horas.

Clave: ____________

○ **Ejercicio 1. [2.0 puntos]** Sea $f(x)$ una función real y $\hat{f}(x)$ su representación en punto flotante, es decir, es el resultado de evaluar la función f en el punto x usando aritmética de punto flotante. Suponga que $|f(x) - \hat{f}(x)| < \tau_x$, donde τ_x es una cota que depende del punto x.

(a) Encuentre una cota para
$$|T_n(f) - T_n(\hat{f})|,$$
donde $T_n(f)$ es el resultado que se obtiene al aplicar la regla de trapecio compuesta para integrar f en el intervalo $[a, b]$ usando n subdivisiones.

(b) Reescriba la cota anterior si existe una constante τ tal que $\tau \geq \tau_x$ para todo x.

(c) En el caso en que $f(x) = 1/x$, tenemos que
$$\ln x = \int_1^x f(t)\, dt.$$
Dé una expresión para τ_x en términos del épsilon de la máquina o de la unidad de redondeo. Luego defina la constante τ y dé una cota para
$$|\ln 2 - T_n(\hat{f})|.$$

○ **Ejercicio 2. [2.0 puntos]** Dada la descomposición SVD de la matriz $\mathbf{A}$,
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$
donde $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz diagonal, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$, ¿qué relación debe existir entre las matrices $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ para que los valores σ_i sean los eigenvalores de $\mathbf{A}$? Fundamente su respuesta.

◯ **Ejercicio 3. [2.0 puntos]**

(a) Suponga que la función $f(x)$ cumple la condición de Lipschitz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

con $0 < L < 1$, para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$. Muestre que la ecuación $x - f(x) = 0$ tiene a lo más una raíz en $[a, b]$.

(b) Sea $f(x) = a \sin x + b$, con $|a| < 1$. Muestre que la iteración de punto fijo $x_{k+1} = f(x_k)$ converge para cualquier punto inicial x_0.

◯ **Ejercicio 4. [2.0 puntos]** Construya una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño 2×2 tal que tenga como eigenvalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y que $\|\mathbf{A}\|_\infty \geq 1000$, $\|\mathbf{A}\|_1 \geq 1000$, $\|\mathbf{A}\|_2 \geq 1000$. Estime el número de condición de la matriz y comente sobre el comportamiento de las soluciones del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$ para diferentes vectores $\boldsymbol{\epsilon}$.

◯ **Ejercicio 5. [2.0 puntos]** Aplique el método de diferencias finitas para resolver el problema

$$u'' - (1 + x^2)u = g(x), \qquad x \in (a, b),$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

Explique si el sistema de ecuaciones que resulta se puede resolver mediante un método iterativo, como Gauss-Seidel.

◯ **Ejercicio 6. [2.0 puntos]** Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Escriba el procedimiento para determinar el polinomio de grado n, $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, tal que el valor

$$\int_a^b [f(x) - p(x)]^2 \, dx$$

sea mínimo.