Examen General de Métodos Numéricos

Julio 3, 2014

Instrucciones:

- De los siete problemas en el examen, deberás seleccionar sólo cinco de ellos para resolver e indicarlos marcando el círculo en la hoja del examen. Sólo esos ejercicios serán calificados.
- En cada ejercicio deberás justificar apropiadamente tu respuesta para recibir el puntaje indicado.
- Para aprobar el examen deben obtener al menos el 80% de la suma de los puntajes de los cinco ejercicios seleccionados.
- Empieza cada ejercicio en una hoja nueva. Asegurate de escribir tu clave en todas tus hojas de respuestas.
- El examen tiene una duración de cuatro horas.

Clave: ____________

○ **Ejercicio 1. [2.0 puntos]** Sea $|x|$ es número real pequeño.

(a) Supongamos que se tiene un valor muy preciso de $y = e^x - 1$. Use este valor para calcular de forma precisa $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, justificando su respuesta.

(b) Explique la dificultad que se tiene para evaluar $\sqrt{x^2+1} - 1$ y dé una forma para evitar ese problema.

○ **Ejercicio 2. [2.0 puntos]** Determina la transformación de Householder que aniquila todas las entradas, excepto la primera del vector $(1,1,1,1)^t$. Específicamente, determina escalar α y el vector v tales que

$$\left(1 - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

○ **Ejercicio 3. [2.0 puntos]** Sea la matriz $P = I - \alpha vv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(a) Calcule el valor de α si P es ortogonal.

(b) Si x con $\|x\|_2 = 1$ es un eigenvector de P muestra que $x = \pm v$ y $\lambda = -1$ es su eigenvalor correspondiente.

○ **Ejercicio 4.** **[2.0 puntos]** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b + c, \tag{1}$$

donde A es una matriz de $n \times n$ simétrica, definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que el método de Newton para minimizar a la función f converge en una iteración para cualquier punto inicial x_0.

○ **Ejercicio 5.** **[2.0 puntos]** Sea A una matriz $m \times n$, $m > n$, y USV^t su factorización en valores singulares, con

$$U = [u_1 \ \cdots \ u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad V = [v_1 \ \cdots \ v_m] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad u_i \in \mathbb{R}^m, \qquad v_i \in \mathbb{R}^n,$$

$$S = \begin{bmatrix} S_n \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad S_n = \text{diag}(s_1, ..., s_n), \quad \text{y} \quad s_1 > s_2 > ... > s_n > 0.$$

(a) Dado $1 < k < n$ definimos $S_k = \text{diag}(s_1, ..., s_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Sigma_k = \begin{bmatrix} S_k \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $A_k = U\Sigma_k V^t$. Calcule $\|A_k - A\|_2$.

(b) Encuentre el vector x que es solución del problema de mínimos cuadrados

$$\min_x \ \|Ax - b\|^2$$

usado la factorización SVD de A.

(c) Si reemplazamos A por A_k en el problema de mínimos cuadrados, $\min_x \ \|A_k x - b\|^2$, muestre que no existe solución única y exprese las soluciones del problema en términos de la factorización SVD.

○ **Ejercicio 6.** **[2.0 puntos]** Se desea aproximar el valor de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un punto (x_i, y_i) donde $x_1 \leq x_i \leq x_2$ y $y_1 \leq y_i \leq y_2$, vea la Figura 1 Panel a), conociendo el valor de la función en cuatro puntos (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), y (x_2, y_2), es decir, se conocen $f(x_1, y_1)$, $f(x_1, y_2)$, $f(x_2, y_1)$, y $f(x_2, y_2)$, ver Figura 1 Panel b). Definamos

$$\begin{aligned} \alpha &\overset{def}{=} \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} \\ \beta &\overset{def}{=} \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} \end{aligned}$$

a) Muestre que la interpolación lineal de la función f en el punto (x_i, y_1) a partir de los valores de la función en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_1) (en la dirección 'x') se puede escribir de la siguiente forma:

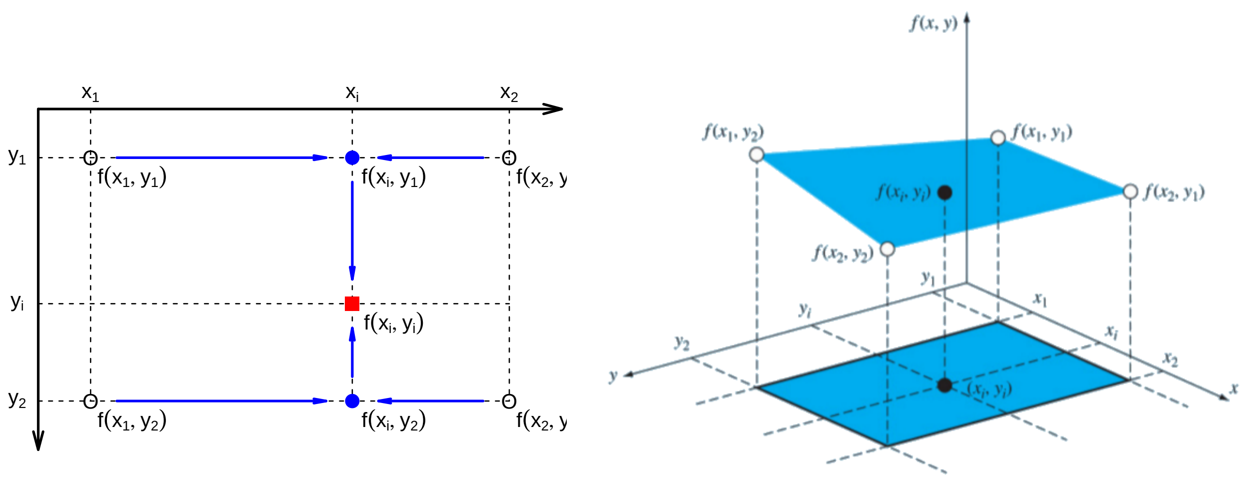
$$f(x_i, y_1) \quad = \quad (1 - \alpha)f(x_1, y_1) + \alpha f(x_2, y_1)$$

b) Muestre que la interpolación lineal de la función f en el punto (x_i, y_i) a partir de los valores de la función en los puntos (x_i, y_1) y (x_i, y_2) (en la dirección 'y') se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i) &= (1-\alpha)(1-\beta)f(x_1, y_1) + \alpha(1-\beta)f(x_2, y_1) + \\ &\quad (1-\alpha)\beta f(x_1, y_2) + \alpha\beta f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Nota: Al resultado anterior se conoce como *interpolación bilineal*.

Figura 1: Interpolación Bilineal



a) b)

◯ **Ejercicio 7. [2.0 puntos]** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a, c > 0$.

(a) Muestre que al usar el **método de Euler mejorado** para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= ay \\ y(0) &= b \end{aligned}$$

en $x = c$ con tamaño de paso fijo $h > 0$ es

$$y(c) \approx b\left(1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2\right)^{\frac{c}{h}}.$$

(b) Determine el orden del método y dé la expresión que define a la región de estabilidad.