

Examen General de Métodos Numéricos

Enero 9, 2014

Instrucciones:

- De los siete problemas en el examen, deberás seleccionar sólo cinco de ellos para resolver e indicarlos en la hoja del examen. Sólo esos ejercicios serán calificados.
- En cada ejercicio deberás justificar apropiadamente tu respuesta para recibir crédito.
- Empieza cada ejercicio en una hoja nueva. Asegurate de escribir tu nombre en todas tus hojas de respuestas.
- El examen tiene una duración de tres horas.

○ **Ejercicio 1.** Indique los problemas que se pueden tener al evaluar la función $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ en una computadora para x arbitrario. Dé una forma para evaluar la función cuando $|x| < 0.5$ de modo que se puede reducir la propagación de errores.

○ **Ejercicio 2.** Determina la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & b+1 & 1 \\ 0 & 2b & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Encuentra bajo que condición es singular la matriz A.

○ **Ejercicio 3.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

Muestre que:

- $\rho(A) \geq 2$, donde $\rho(\cdot)$ representa el radio espectral de una matriz.
- Si A es definida positiva entonces $\rho(A) > 4$.

○ **Ejercicio 4.** Determina la solución de mínimos cuadrados del problema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Explica que ocurre al tratar de calcular la solución en una computadora en la que ξ^2 es menor que el epsilon de la máquina.

- **Ejercicio 5.** El recíproco de un número r puede calcularse mediante la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n r).$$

Establezca esta relación aplicando el método de Newton a alguna función $f(x)$.

- **Ejercicio 6.** Aproxima la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx$$

aplicando la regla trapezoidal simple y extrapolación de Richardson una sola vez.

Nota: Para calcular $\text{sen}(0)$, $\text{sen}(\pi/4)$ y $\text{sen}(\pi/2)$ no necesitas calculadora.

- **Ejercicio 7.** Usa el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

para hallar la región de estabilidad de la regla trapezoidal

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n + y_{n+1}).$$