CIMAT Examen General Julio 15, 2010

Variable Compleja

Cada problema tiene un valor de 1.66 puntos. Justifique sus argumentos.

1. Demuestre que toda función entera cuya parte real es acotada, debe ser constante.

2. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : D \to \mathbb{R}$ una función armónica infinitamente diferenciable en D. Considere el operador diferencial
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
y para $n > 0$ entero, denote por $\partial_z^n u$ la función que se obtiene al aplicar n veces el operador $\partial/\partial z$ a la función u. Demuestre que $\partial_z^n u$ es una función holomorfa en D.

3. Demuestra que
$$\int_\gamma \frac{3sen^2 z - 12e^z}{z + 16/\pi} dz \ = \ 0,$$
donde γ es un círculo de radio uno alrededor de -7.

4. Calcule el valor de la integral
$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_\gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz\ ,$$
donde γ es un círculo y a es un punto interior al círculo.

5. a) Verifica que existe $\lim_{x\to o} e^{-1/x^2}$ si $x \in \mathbb{R}$.
b) ¿ Qué tipo de singularidad tiene la función e^{-1/z^2} si $z \in \mathbb{C}$?

6. Encuentre la expansión en serie de potencias de la función $f(z) = \dfrac{2z+3}{z+1}$ en potencias de $z - a$. ¿Cuál es su radio de convergencia?.

Tiempo límite: 3 hrs.