CIMAT Examen General Julio 7, 2015

Variable Compleja

Resuelve los siguientes seis problemas. Cada uno se califica por 10 puntos. La calificación mínima para aprobar es de 50 puntos. En tus respuestas justifica todos tus argumentos. Tiempo límite 4 horas.

1. Identificando $\mathbb{R}^2$ con el plano complejo $\mathbb{C}$ de la manera usual, consideramos una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Si F diferenciable sobre los reales, ¿es necesariamente diferenciable sobre los complejos? Recíprocamente, si F es diferenciable sobre los complejos, ¿es necesariamente diferenciable sobre los reales? Demuestra o proporciona un contraejemplo según sea el caso.

2. Demuestra la siguiente versión de la Estimación de Cauchy para el módulo de la derivada: Sea f es una función holomorfa y sea $D(z_0, r)$ el disco abierto centrado en z_0 y de radio $r > 0$. Si $f(D(z_0, r)) \subset D(0, s)$ para algún $s > 0$, entonces $|f'(z_0)| \leq s/r$.

3. Sea γ una curva simple, cerrada, orientada positivamente, que rodea a los números $0, 1, 2, \ldots, k$ en el plano complejo. Para cada entero $k \geq 0$ calcula las siguientes integrales

   (a)
   $$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\ldots(z-k)}$$

   (b)
   $$\int_\gamma \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-k)}{z} dz$$

4. Sea f una función holomorfa en todo el plano complejo excepto en el punto z_0. Si z_0 es una singularidad (a) esencial, (b) polo o (c) removible, determina qué tipo de singularidad tiene $1/f$ en z_0 en cada uno de los tres casos.

5. Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo. Se define la función $u : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ como

$$u[r \exp(i\theta)] = r^s \cos s\theta.$$

   Prueba que u es una función armónica.

6. Da un ejemplo de una función holomorfa que mande de forma biyectiva el disco unitario $D(0,1)$ al semiplano inferior $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$.