Examen General de Álgebra Lineal
Julio de 2016

INSTRUCCIONES: Justifica apropiadamente tus respuestas. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva. Escribe tu nombre en todas tus hojas de respuesta.

1. Encuentra una base para el subespacio S de $\mathbb{R}^4$ generado por las soluciones de la ecuación:
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$
Además, encuentra una base para $S^{\perp}$, el complemento ortogonal de S.
2. Calcula la factorización de Cholesky $A = LL^T$ de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$
de manera que la entradas diagonales de L sean positivas. Explica por qué existe tal factorización.
3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $A^2 = I$.
   a) ¿Cuáles son los eigenvalores de A?
   b) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq -I,\ I$, encuentra la traza y el determinante de A
   c) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y su primer renglón es $(3, -1)$ ¿Cuál es el segundo renglón?
4. Sean u, $v \in \mathbb{R}^n$, y sea $A = I + uv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   a) Muestra que si A es invertible, entonces su inversa tiene la forma
   $$A^{-1} = I + \alpha uv^T$$
   para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentra una expresión para α.
   b) Encuentra bajo qué condiciones A es singular. Suponiendo que A es singular, determina la dimensión del kernel(A).
5. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Calcula la forma canónica de Jordan J de A.

b) Calcula una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = J$.

c) Calcula e^{tA}, la exponencial de la matriz tA.

d) Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + z \\ y' &= y + 6z \\ z' &= z \end{aligned}$$

con condición inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 1$.