Examen General de Análisis I

Julio de 2015

Instrucciones: La duración del examen es de 4 hrs. La calificación mínima aprobatoria es del 60 %. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

Da argumentos completos. Si te apoyas en algún teorema conocido, asegúrate de enunciarlo con detalle. Pon atención en la redacción de tus soluciones. Se tomará en cuenta.

1. Prueba o da contraejemplo:

   a) Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum a_n^2$ converge.

   b) Si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $|a_n| < \frac{1}{n}$ para toda n suficientemente grande.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con la propiedad de que toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo en A. Prueba que A es compacto.

3. Supón que la sucesión de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a una función $f[0,1] \to \mathbb{R}$. ¿Es cierta la siguiente identidad?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$

4. Calcula los puntos críticos de la función $f : (-\pi/2, 3\pi/2)\times(-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x,y) = 13 - 12\cos x + 3\cos y - 4\cos x \cos y$$

   y decide cuáles son máximos, mínimos o sillas.

5. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y supón que existe $M > 0$ tal que para toda elección finita de números distintos entre sí, $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, se tiene que

$$|f(x_1) + \cdots + f(x_n)| \leq M.$$

   Demuestra que el conjunto $\{x \in [0,1] \mid f(x) \neq 0\}$ tiene medida cero.

6. Explica por qué el conjunto determinado por la ecuación

$$x^2 + y + \sin(xy) = 0$$

   es la gráfica de una función de una variable, en una vecindad del $(0,0)$.

7. Evalúa la integral

$$\int\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\ dxdy$$

en la región $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$

8. Enuncia el Teorema de Green y úsalo para calcular el área acotada por un arco de la cicloide $x(t)=a(t-\operatorname{sen} t), y(t)=a(1-\cos t)$, $a>0$, $0\leq t\leq 2\pi$.