Examen General Julio 2016

Duración tres horas. Tiene que hacer 6 de los siguientes problemas.

Con 42 puntos aprueba el examen.

1. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) (5 puntos) Prueba o da un contraejemplo: Si existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente, entonces $f_n' \to f'$ puntualmente.

   (b) (5 puntos) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f_n' \to g$ uniformemente y $f_n \to f$ uniformemente. Demuestra que $g = f'$. *Pista:* Usa la definición de la derivada y el teorema del valor medio. Observe que las hipótesis implican que g tiene que ser continua (¿por qué?).

2. (10 puntos) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones integrables en el sentido de Riemann tales que existe un conjunto denso $S \subseteq A$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$. Demuestra que $\int_A f = \int_A g$.

3. (10 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que converge a cero. Demuestra que hay una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ converge.

4. (10 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que $f(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

5. (a) (5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(tx) = tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal.

   (b) (5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 tal que $f(tx) = tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que f es lineal.

6. (10 puntos) Demuestra que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no es cerrado, entonces existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ tal que f no está acotada.

7. (10 puntos) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función analítica. Demuestra que si $U \subseteq A$ es abierto y conexo y $f|_U = 0$, entonces $f = 0$.

8. Encuentra los puntos críticos y clasifícalos entre mínimo local, máximo local, y punto de silla (saddle point):

(a) (5 puntos) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $f(x, y) = \cos(2x)sen(y)$.

(b) (5 puntos) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $f(x, y) = \cos(x) + y^2 - 1$.

9. Consideremos el conjunto $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ con la topología dada por la norma $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Determina (con demostración) para los siguientes subconjuntos $A \subseteq C([0, 1])$ si la cerradura $\overline{A} \subseteq C([0, 1])$ es compacta.

   (a) (2 puntos)
   $A = \{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ es de clase } C^1 \text{ y } ||f'||_\infty < 1\}$

   (b) (8 puntos)

   $$A = \{f \in C([0, 1]) \mid \ f \text{ es de clase } C^2 \text{ y } ||f||_\infty < 1 \ \ y||f''||_\infty < 1\}$$