EXAMEN GENERAL : ANÁLISIS MATEMÁTICO

Sólo hay que resolver 6 de los 9 ejercicios.

Indica cuáles ejercicios quieres que se te califiquen.

Con 42 puntos apruebas el examen.

Duración: 3 horas.

(1) Considere el sistema

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ 2xy^3 + u^2z &= 0 \end{aligned}$$

(a) (5 puntos) Pruebe que el sistema anterior define a x, y como funcionas implícitas de z, u de manera diferenciable en una vecindad del punto $(x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$.

(b) (5 puntos) Si $x = h(z, u)$ y $y = g(z, u)$ son las funciones cuya existencia en una vecindad de $(0, 1, 0, 1)$ se probó en (a), demuestre que la función $F(z, u) = (h(z, u), g(z, u))$ tiene una función inversa diferenciable en una vecindad del punto $(0, 1)$.

(2) Definimos una métrica sobre $C([0,1])$ por $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ para $f, g \in C([0,1])$. Sea $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dado por

$$T(f) = \int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

(8 puntos) Demuestre que T es continua. (2 puntos) ¿Es T uniformemente continua?

(3) (10 puntos) Pruebe que cualquier función monótona $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ que satisface la propiedad del valor intermedio es continua.

(4) (10 puntos) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y f es diferenciable en $x = 0$. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ también converge absolutamente.

(5) (10 puntos) ¿Existe un conjunto infinito no numerable en $\mathbb{R}^n$ que *no* tiene puntos de acumulación?

(6) (10 puntos) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Calcule las derivadas parciales de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \int_x^{\cos y} g(s) \,\mathrm{d}x$.

(7) (10 puntos) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge puntualmente a una sucesión f en X. Demuestre que si existe $M > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M||x - y||$, entonces $f_n \to f$ uniformemente.

(8) (10 puntos) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable tal que existe $m > 0$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestre que $\frac{1}{f}$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ y que

$$\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)\left(\int_a^b f\right) \geq (b-a)^2.$$

(9) (10 puntos) Sea $f : R^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{yx} \cos y$. Escriba el polinomio de Taylor de grado dos alrededor de cero. ¿Qué dice el teorema de Taylor acerca del residuo (término de error) en este caso?

Enero, 2016