Examen general de Análisis, enero 2014

Con 31 puntos pasas.

1. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $f_n(x) = x^n$. Demuestra que la sucesión $\{f_n\}$ converge en $[0,1]$ mas no uniformemente. Sea ahora $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con $g(1) = 0$. Demuestra que la sucesión $\{gf_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$. (2p+3p)

2. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|$ converge.

   (a) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos(nx)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$. (2p)

   (b) Define $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$ y prueba que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos(nx)$, para toda $x \in \mathbb{R}$. (3p)

3. (a) Prueba que la ecuación

   $$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x - y + z) = 0$$

   en una vecindad de $(0,0,0)$ define una función implícita $z = \phi(x,y)$ derivable en una vecindad U de $(0,0)$. (2p)

   (b) Prueba que $(0,0)$ es un punto crítico de ϕ y di si es máximo o mínimo. (3p)

   (c) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $g(0) = 1$ y $h(x,y) = \frac{\partial \phi(,x,y)}{\partial x}$, definimos en U

   $$F(x,y) = \int_0^{h(x,y)} g(t)\,dt.$$

   Prueba que F es diferenciable en $(0,0)$ y calcula su diferencial en dicho punto. (4p)

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable con derivada continua tal que no existe $x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = f'(x) = 0$. Entonces $S = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ es finito. (5p)

5. Sea f una función de un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ sobre un conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}$ de clase C^2 y tal que $\sum_{j=1}^{n} D_{jj} f(x) = 0$ para toda $x \in A$. Sea $g : B \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $F = g \circ f$.

   (a) Suponiendo que $\nabla f(x) \neq 0$ para toda $x \in A$, determina la condición necesaria y suficiente para que$\sum_{j=1}^{n} D_{jj} F(x) = 0$ para toda $x \in A$. (3p)

   (b) Encuentra la forma más general de las funciones g que verifican dicha condicón en los casos: (i) B es conexo, (ii) $B = I \cup J$ siendo I, J intervalos abiertos ajenos. (3p)

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. Define una función $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante $f_A(x) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$. Prueba que f_A es uniformemente continua. (5p)

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. <u>Usa el teorema de Fubini</u> para probar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. (5p)

8. Sea (S, d) un espacio métrico conexo no acotado. Demuestra que para toda $a \in S$ y para toda $r > 0$, $\{x \in S : d(x, a) = r\}$ es no vacío. ¿Es cierto lo anterior si S es acotado? (5p).