Instrucciones:

- Contesta 5 de los 6 ejercicios que se listan.
- Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas.
- Empieza cada ejercicio en una hoja nueva.
- Escribe tu clave en todas las hojas de respuestas.

Nota: Todos los ejercicios tienen el mismo puntaje. Para aprobar el examen hay que obtener al menos el 80% de la suma del puntaje de los cinco ejercicios. Tienen cuatro horas para resolver el examen.

Clave: ______________

1. Muestra que la siguiente sucesión

$$I_0 = \log\left(\frac{6}{5}\right), \quad I_k + 5I_{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

no es apropiada para aproximar la integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x} dx$$

aunque funciona en aritmética infinita.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

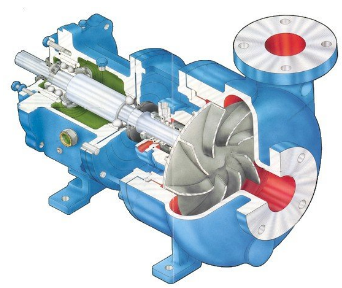
   (a) Dé cotas para los eigenvalores de la matriz A.

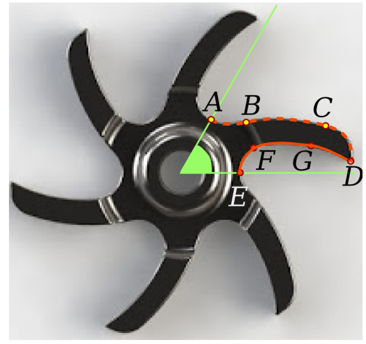
   (b) Describa el método de la potencia.

   (c) Suponga que λ_1 es el eigenvalor asociado a al eigenvector v_1 que se obtienen con el método de la potencia. Explique como usar el método de la potencia para calcular el segundo eigenvalor más grande en valor absoluto.

3. Considere la imagen de una pieza de impulsión hidráulica presentada abajo. La geometría del corte bidimensional de la misma puede describirse por completo definiendo la forma de una sección cubierta por un ángulo de 60° (verde).
Describa el procedimiento algebráico para generar un spline cúbico que pase por los puntos $\{A, B, C, D\}$ (línea naranja punteada). Utilice para ello los valores exactos deseados para las derivadas m_A y m_D en los puntos extremos de ambos splines.[1] Lleve sus desarrollos desde las ecuaciones polinomiales hasta lograr reducir el problema a la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales.
Determine además como cambiaría el sistema si se intenta calcular el otro spline correspondiente a los puntos $\{E, F, G, D\}$ (línea naranja continua) con las pendientes en los extremo dadas por m_E y m_{D2}.

[1] Note que para que el método este bien definido, la pendiente en los puntos extremos no debera ser infinita. Tome esto como un supuesto, ya que siempre podrá ser logrado mediante un cambio en la orientación de la pieza.





4. Algoritmo de Thomas. Considere el sistema lineal tridiagonal $Ax = q$ con la matriz de tamaño $n \times n$ dada como

$$A = \begin{pmatrix} +b_1 & -c_1 & & & \\ -a_2 & +b_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{n-1} & +b_{n-1} & -c_{n-1} \\ & & & -a_n & +b_n \end{pmatrix}$$

Muestre usando operaciones elementales de fila que al convertirla en una matriz bidiagonal superior y resolver para $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ se obtiene el siguiente algoritmo:

1. Start: $\alpha_1 = b_1, \quad \beta_1 = q_1$
2. Forward steps: $\alpha_j = b_j - \frac{c_{j-1}}{\alpha_{j-1}} a_j, \quad \beta_1 = q_j + \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}} a_j, \qquad j = 2, \ldots, n$
3. Backward steps: $x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$

   $x_j = \frac{\beta_j + c_j x_{j+1}}{\alpha_i}, \qquad j = n-1, \ldots, 1$

Calcule además el número de operaciones y determine con ello el orden del algoritmo.

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función convexa en el intervalo $[a, b]$, esto es,

$$t \in [0, 1],\ x, y \in [a, b] \quad \Longrightarrow \quad f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

Si además f es diferenciable, se puede ver que su gráfica está por encima de cualquier recta tangente a f.

(a) Muestre que la regla compuesta de integración de punto medio es una cota inferior de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

(b) Muestre que la regla compuesta de trapecio es una cota superior de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

6. Muestre que bajo el supuesto de que $f \in \mathcal{C}^2$, el método de Crank-Nicolson definido a través de la ecuación

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right)$$

tiene orden 2 con respecto al paso espacial h.