EXAMEN GENERAL DE VARIABLE COMPLEJA, ENERO 2003

Parte I

Debe resolver **todos** los problema de esta parte. Cada problema tiene un valor de 1.5 puntos.

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función $\mathbb{R}-$lineal. Considerando a T como un matriz ?qué condiciones deben satisfacer los coeficientes para que T sea una función holomorfa? (Se considera la idendificación natural de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$).

2. Supongamos que $u(x,y) = e^x g(y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, donde $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Demuestre que entonces $g(y) = a\cos y + b\sin y$ con a y b reales. Encuentre una función holomorfa f tal que $Ref = u$.

3. Calcule:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}.$$

4. Explique tres diferencias sustanciales entre la teoría de funciones holomorfas y la teoría de funciones diferenciables de variable real.

Parte II

Debe resolver 2 y sólo 2 de los siguientes 3 problemas. Cada uno de estos problemas tiene un valor de 2 puntos.

5. Calcule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x-1)^2(x-2)}.$$

6. Probar que toda función analítica biyectiva del disco unidad ($|z|<1$) en el disco unidad es una transformación de Moebius.

7. Sea $f(z)$ una función entera tal que $f(0) = 0$ y $Ref \to 0$ cuando $z \to \infty$. Demuestra que entonces f es idénticamente cero.

Nota importante: En general los problemas de la Parte I son más elementales que los de la parte II. Resolver de manera correcta todos los problemas de la parte I supone tener 6 de los 7 puntos necesarios para aprobar el examen.