EXAMEN GENERAL DE VARIABLE COMPLEJA, ENERO 2004

Resuelve **cinco** de los siguientes problemas. Cada problema tiene un valor de 2 puntos. Se requiere que al entregar tu examen indiques cuáles son los problema que quieres que se califiquen.

1. Si f es una función holomorfa, la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa. Demuestra o da un contraejemplo.

2. Sea f una función entera (holomorfa en todo el plano complejo), y supongamos que $|f(z)| \geq 2$. Muestra que f es constante.

3. Calcula:

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 + e^z}{z(z-3)} dz$$

4. Si f está definida en un dominio que contiene al disco unitario cerrado, es holomorfa, no constante y además, $|f(z)| < 1$ cuando $|z| = 1$; muestra que no puede existir un elemento z en el interior del disco unitario que satisfaga $f(z) = z$.

5. Supongamos que f es una función holomorfa definida en un dominio Ω y satisface $|f(z) - 1| < 1$ si $z \epsilon \Omega$. Entonces

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para toda curva cerrada $\gamma \in \Omega$

6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + x^2}.$$

Encuentra el radio de convergencia de su serie de Taylor alrededor de $x = 5$.

7. Demuestra que todo polinomio de una variable con coeficientes complejos, de grado mayor o igual que uno, tiene al menos una raíz compleja.