# Geometría Algebraica Computacional
# Tarea 1

Abraham Martín del Campo

Fecha de entrega: **18 de Febrero del 2020**

1. Demuestra la equivalencia entre las condiciones *(i)* y *(ii)* de la definición de ideal monomial.
2. Sea $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, verifica que si $I \subset S$ es un ideal monomial, entonces $S/I$ es un espacio vectorial sobre $\Bbbk$.
3. Ordena todos los monomios en tres variables de grado menor que 4 bajo los ordenes $\prec_{lex}$, $\prec_{dlx}$, y $\prec_{drl}$.
4. Sea $\prec$ el orden (no graduado) lexicográfico inverso: $x^\alpha \succ x^\beta$ si la última entrada distinta de cero de $\alpha - \beta$ es negativa. ¿Es esto un orden monomial?
5. Un ideal monomial es *libre de cuadrados* si el soporte de sus monomios generadores tienen entradas menores que 2. Demuestra que si un ideal $I \subset S$ tiene un ideal inicial libre de cuadrados, entonces $I$ es radical. Da un contra ejemplo de la implicación inversa.
6. Muestra que para cualesquiera dos ideales $I, J$ y cualquier orden monomial $\prec$, se cumple que $(\mathrm{in}_\prec I)(\mathrm{in}_\prec J) \subseteq \mathrm{in}_\prec(IJ)$. Encuentra dos ideales $I$ y $J$ para los que la inclusión es propia.
7. Demuestra que $\prec_{drl}$ tiene la siguiente propiedad: Si $f \in S$ es un polinomio homogéneo distinto de cero, entonces $x_n$ divide a $\mathrm{in}_{\prec_{drl}}(f)$ si y solo si $x_n$ divide a $f$.
8. Sea $I = \langle x^2 + y^2, x^3 + y^3 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$. Fijémos el orden $\prec_{lex}$ con $y \prec_{lex} x$.
   *a*) Muestra que $y^4 \in I$.
   *b*) Demuestra que la base de Gröbner reducida de $I$ es $\{y^4, xy^2 - y^3, x^2 + y^2\}$
   *c*) Demuestra que $\{x^2 + y^2, x^3 + y^3\}$ no puede ser una base de Gröbner de $I$ para ningún orden monomial.
9. Considera el ideal generado por
$$xy^3 + xz^3 + x - 1, yz^3 + yx^3 + y - 1, zx^3 + zy^3 + z - 1.$$
   Usando `Macaulay2` o cualquier otro programa de álgebra conmutativa, calcula una base de Gröbner con respecto a $\prec_{drl}$ y a $\prec_{lex}$. ¿Cuántos polinomios tiene cada base? ¿Cuál es el grado máximo de los elementos de las bases de Gröbner para cada caso?
10. Sea $I \subset \Bbbk[a, b, c, d]$ un ideal generado por 3 polinomios homogéneos aleatorios de grado 4. Usando `Macaulay2` o cualquier otro programa, calcula bases de Gröbner de $I$ con respecto a $\prec_{drl}$ y $\prec_{dlx}$. ¿Cuál es el grado máximo de los elementos de las bases de Gröbner para cada caso? ¿Por qué crees que una base es más complicada que la otra?