Geometría Algebraica Computacional
Tarea 2

Abraham Martin del Campo

Fecha de entrega: **10 de Marzo del 2020**

1. Considera la siguiente curva parametrizada: $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ dada por $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. El espacio tangente de esta curva, es una superficie parametrizada por $(t, u) \mapsto (t+u, t^2+2tu, t^3+3t^2u)$.
   a) Encuentra las ecuaciones que definen a la curva y también las del espacio tangente.
   b) Calcula el radical del ideal de estas dos variedades.
2. Let $I = \langle x_1x_2 - x_3^2, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$. Calcula el primer ideal de eliminación I_1.
3. Sea $J = \langle x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_r} \rangle$ un ideal monomial. Encuentra algoritmos o fórmulas para calcular:
   a) Si un monomio x^β está en J.
   b) El ideal cociente $(J : x^\beta)$.
   c) La intersección $J \cap I$, con I siendo otro ideal monomial.
   d) Un conjunto mínimo de generadores de J.
4. Prueba que $(I : J)$ es un ideal que contiene a I.
5. Este ejercicio exhibe un algoritmo para calcular la saturación de ideales. Sea $I \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] = S$ un ideal, y sea $f \in S$ un polinomio fijo.
   a) Prueba que $(I : f^\infty)$ es un ideal.
   b) Demuestra que tenemos una cadena ascendente de ideales
   $$(I : f) \subset (I : f^2) \subset (I : f^3) \subset \cdots$$
   c) Muestra que existe un entero no negativo N para el que $(I : f^\infty) = (I : f^N)$.
   d) Demuestra que $(I : f^\infty) = (I : f^m)$ si y solo si $(I : f^m) = (I : f^{m+1})$.
6. La superficie de Veronese está dada por la parametrización $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ que manda las coordenadas homogéneas $[s, t] \mapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$. Encuentra las ecuaciones que definen a esta superficie (OJO: recuerda que I debe ser homogéneo y el punto $[0 : 0 : 0 : 0]$ no debe estar en la imagen).
7. Sea I un ideal homogéneo y $f = x_n$, en el anillo de polinomios $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, dotado del orden $\prec_{drl}$, con $x_n \prec x_{n-1} \prec \cdots \prec x_1$, y sea G la base de Gröbner reducida de I.

a) Muestra que el conjunto

$$G' = \{f \in G \mid x_n \text{ no divide a } f\} \bigcup \{f/x_n \mid f \in G \text{ y } x_n \text{ divide a } f\}$$

es una base de Gröbner de $(I : x_n)$.

b) Demuestra que se obtiene una base de Gröbner de $(I : x_n^\infty)$ al dividir cada elemento $f \in G$ por la potencia más grande de x_n que divide a f.

8. ¿Qué valores complejos α hacen soluble al siguiente sistema de ecuaciones?

$$x^d - \alpha \quad = \quad x^3 - x + 1 \quad = \quad 0.$$

Da una fórmula para la resultante en términos de α y d.