Geometría Algebraica Computacional
Tarea 3

Abraham Martín del Campo

Fecha de entrega: **27 de abril del 2020**

1. Escribe la matriz de 5×5 que se usa para calcular el discriminante de una cúbica genérica $x^3 + ax^2 + bx + c$, y calcula su determinante para encontrar el discriminante. Compáralo con el discriminante para el caso especial $x^3 + bx + c$.

2. Encuentra las soluciones del sistema de polinomios

$$y^2 - x^3 + x \;= 0\; = y^3 - x^2$$

en $\mathbb{R}^2$. Grafica las curvas y sus intersecciones.

3. Calcula el número de soluciones del sistema de polinomios

$$1 + 2x + 3y + 5xy \;= 7 + 11xy + 13xy^2 + 17x^2y \;=\; 0.$$

Muestra que cada solución es no degenerada (Una solución a es no degenerada, si las derivadas $\partial F_i/\partial x_j$ (para $i = 1, 2$) evaluadas en a son linearmente independientes). Compara el número de soluciones con la cota de Bézout para este sistema. ¿Cuántas de estas soluciones son reales?

4. Sea $\mathbb{k}$ algebraicamente cerrado e $I \subset S = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal radical de dimensión cero y V su variedad. En este problema, vamos a demostrar que $|V| = \deg I$. Supongamos que $V = \{p_1, \ldots, p_m\}$, o sea, $|V| = m$.

   a) Definamos la función $\phi : S/I \to \mathbb{k}^m$ dada por $\phi([f]) = (f(p_1), \ldots, f(p_m))$. Demuestra que ϕ es una transformación lineal, que está bien definida, y que es una a uno.

   b) Para i fijo, sea $W_i := \{p_j \mid j \neq i\}$. Demuestra que $1 \in \mathcal{I}(W_i) + \mathcal{I}(p_i)$.
   Hint: muestra que $\mathcal{I}(p_i)$ es un ideal máximo.

   c) Del inciso anterior, podemos encontrar $f_i \in \mathcal{I}(W_i)$ y $g_i \in \mathcal{I}(p_i)$ tales que $f_i + g_i = 1$. Muestra que $\phi(f_i)$ es el vector en $\mathbb{k}^m$ que tiene un 1 en la i-ésima coordenada, y 0 en las demás.

   d) Concluye que ϕ es un isomorfismo y que $\deg I = |V|$.

En los siguientes problemas, se te pide que hagas experimentos computacionales.

5. Crea un código que haga lo siguiente: Para cada $n = 2, \ldots, 5$ y cada $d = 1 \ldots, 10$, genera n polinomios aleatorios de grado d en n variables, y calcula el número de soluciones aisladas, y que reste este número a la cota de Bézout.

6. Crea un código que haga lo siguiente: Sea $\mathcal{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, y crea un sistema de 2 polinomios aleatorios con soporte en $\mathcal{A}$, por ejemplo, el polinomio

$$1 + 3x + 9x^2 + 27y + 81xy + 243xy^2$$

tiene soporte en $\mathcal{A}$. Calcula el número de soluciones aisladas y compárala con la cota de Bézout.

7. Repite el mismo ejercicio anterior, pero para varias matrices $\mathcal{A}$ de $2 \times n$, tales que las entradas de $\mathcal{A}$ sean enteros no negativos, $\mathcal{A}$ tenga más de 2 columnas, y $0 \in \mathcal{A}$. ¿Puedes encontrar una conjetura del número de soluciones en función de $\mathcal{A}$?