Cálculo IV

Tarea 4

1. Evalúe la integral de la función $f(y) = 1+\frac{1}{y}$ a lo largo de la trayectoria $c : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ definida por $c(t) := (3cos^3(t), \pi sen^2(t), 0)$.

2. Evaluar $\int_c (x^3, 1, xy) \cdot ds$ donde $c(t) := (t^4, t^2, 1)$.

3. Sea $F(x, y, z) := (x^3, y, z)$ un campo vectorial. Demuestre F no realiza trabajo alguno en una partícula que se mueve en el círculo de radio $a > 0$, centrado en $(0, 0)$ y contenido en el plano yz.

4. Definamos $\nabla f(x, y, z) := (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

5. Sea $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria tal que $c'(t) \neq 0$. Cuando se cumple esta condición, se dice que c es **regular**. Sea la función f definida por $f(x) := \int_0^x \|c'(t)\|dt$.

   a) Calcular df/dx.

   b) Usando la respuesta del inciso anterior demostrar que $f : [a, b] \to [0, L]$, donde L es la longitud de c, tiene una inversa diferenciable[1]

   c) Calcular dg/ds.

   d) Mostrar que $\|c \circ g(s)\| = 1$ para toda $s \in [0, L]$. Concluir que cualquier trayectoria regular $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se puede reparametrizar de tal manera que $\|\gamma'(t)\| = 1$ para toda $t \in [a, b]$. ¿Se puede lograr siempre lo anterior si pedimos, además, que el dominio de la reparametrización sea exactamente el intervalo $[0, 1]$?, ¿ porqué?.

6. a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

   b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

   c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $(x_0, y_0, 0)$ donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

   d) Mostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están sobre la superficie y en el plano tangente hallado en el inciso anterior.

7. Considérense las superficies $\Phi_1(u, v) = (u, v, 0)$ y $\Phi_2(u, v) = (u^3, v^3, 0)$.

   a) Mostrar que la imagen de Φ_1 y de Φ_2 es el plano xy.

   b) Mostrar que Φ_1 define una superficie suave pero que Φ_2 no. Concluir que la noción de suavidad de una superficie S depende de la existencia de al menos una parametrización suave para S.

   c) Demostrar que el plano tangente de una superficie S está bien definido independientemente de la parametrización suave (uno a uno). (Hint: Utilize el teorema de la función inversa.)

   d Después de lo anterior ¿será posible encontrar una parametrización suave del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?. Justifique su respuesta.

---

[1] Es decir, existe una función diferenciable $g : [0, L] \to [a, b]$ tal que $f \circ g(s) = s$ y $g \circ f(x) = x$.

8. Una **helicoide** se define mediante $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, donde

$$x = rcos(\theta) \qquad y = rsen(\theta) \qquad z = \theta$$

   y D es la región donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$. Hallar el área de la superficie determinada por Φ.

9. Demostrar el **teorema de Pappus**: Sea $c : [a,b] \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\}$ una trayectoria C^1, con $c(t) = c(s) \Leftrightarrow t = a$ y $s = b$. Entonces, el área de la superficie generada al girar la imagen de c alrededor del eje y es igual a $2\pi\bar{x}l(c)$, donde $l(c)$ es la longitud de c y

$$\bar{x} := \frac{\int_c \pi_1((x,y))ds}{l(c)}, \quad \pi_1(x,y) := x.$$

10. Mostrar que el área de superficie del hemisferio superior de radio R, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, se puede calcular utilizando la fórmula vista en clase del área de una superficie que es la gráfica de una función f de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, evaluada como una integral impropia.