FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
***XX* ANIVERSARIO**

EL V POSTULADO DE EUCLIDES :
Un enfoque histórico

Jorge Albarrán

Universidad de Guanajuato
Facultad de Matemáticas
albarran@cimat.mx

Euclides (siglo 3 a.C.)
Elementos
Libro I, Postulados:

1. Una línea recta puede ser dibujada de cualquier punto a cualquier otro punto.

2. Una línea recta finita puede ser extendida continuamente en una línea recta.

3. Un círculo puede ser dibujado con cualquier centro y cualquier radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una línea recta cayendo en dos líneas rectas hace los ángulos interiores en el mismo lado menos que dos ángulos rectos, las líneas rectas, si son extendidas indefinidamente, se intersectan en el lado en el cual los ángulos son menos que dos ángulos rectos.

Definición: Las líneas rectas paralelas son líneas rectas, las cuales, estando en el mismo plano y siendo extendidas en ambas direcciones indefinidamente, no se intersectan en ninguna dirección.

Proposición 17. La suma de dos ángulos en un triángulo es menos que dos ángulos rectos.

Proposición 28. (En parte.) Si una línea recta cayendo en dos líneas rectas hace los ángulos interiores en el mismo lado igual a dos ángulos rectos las líneas serán paralelas.

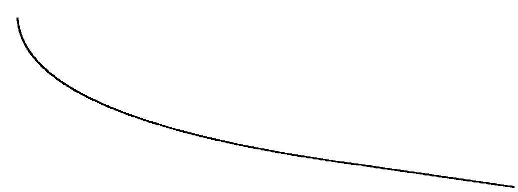
El quinto postulado es usado por primera vez en la proposición 29 en el Libro I.

Próculo (410 - 485)
Comentarios sobre el Primer Libro de Euclides.

Redefinición de Posidonio: Dos líneas son paralelas si son equidistantes, i.e. si la distancia de cada punto en la primera línea a la segunda línea es la misma.

Problema: La definición asume que existen las líneas equidistantes.

Crítica de Próculo: Consideremos el ejemplo de una hipérbola y su asíntota. Debemos mostrar que no existen líneas rectas asintóticas.



La 'demostración' de Próculo

Proposición: Una línea recta que intersecta a una de dos líneas paralelas, intersecta también a la otra.

Postulado (Aristóteles): La distancia entre dos líneas que se intersectan puede hacerse tan grande como se quiera extendiendo las líneas lo suficiente. (Demostrado por Saccheri, siguiendo los Postulados 1 - 4 de Euclides.)

Problema: Próculo introduce la suposición de que la distancia entre dos líneas paralelas es acotada.

Trabajo Árabe en el postulado de las paralelas

Ibn al-Haytham (965-1041).

Khayyam (siglo 12).

... y muchos muchos otros.

Trabajo Europeo en el postulado de las paralelas.

Wallis (1616 - 1703).

Usa el concepto de escalar figuras en lugar del postulado de las paralelas.

F. Bolyai (1775 - 1856).

Prueba la siguiente equivalencia al postulado de las paralelas: Cualesquiera tres puntos no colineales determinan un círculo.

Saccheri (1667 - 1733).
Euclides ab omni naevo vindicatus, 1697.

Tres hipótesis del cuadrilátero de Khayyam:

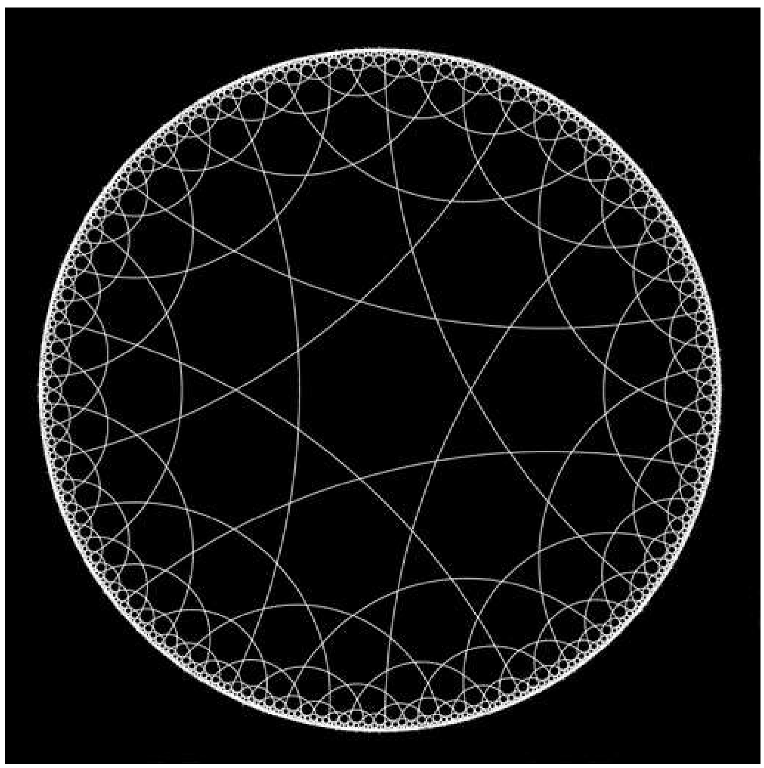
1. La hipótesis del Ángulo Recto:
$$\angle C = \angle D = 1 \text{ ángulo recto.}$$
2. La hipótesis del Ángulo Obtuso:
$$\angle C = \angle D > 1 \text{ ángulo recto.}$$
3. La hipótesis del Ángulo Agudo:
$$\angle C = \angle D < 1 \text{ ángulo recto.}$$

Saccheri intenta demostrar el postulado de Euclides por contradicción, demostrando que las hipótesis 2 y 3 son falsas.

Lambert (1728 - 1777).

Theorie der Parallellinien, 1768.

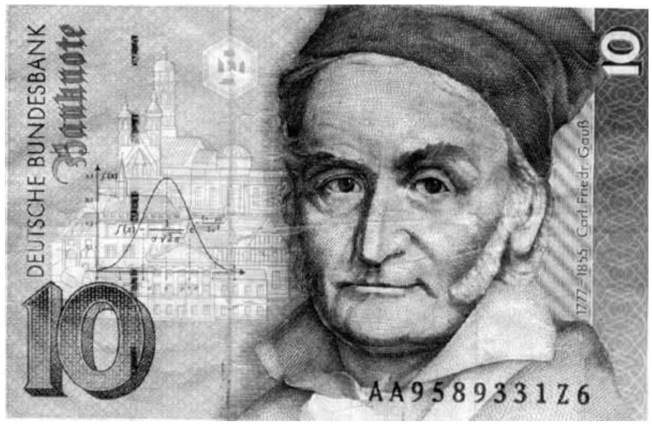
Usa el cuadrilátero de Ibn al-Haytham con las mismas hipótesis que Saccheri.



NACE LA GEOMETRIA NO EUCLIDEANA

C.F. Gauss (1777 - 1855).

Cartas a sus colegas pero sin publicaciones.



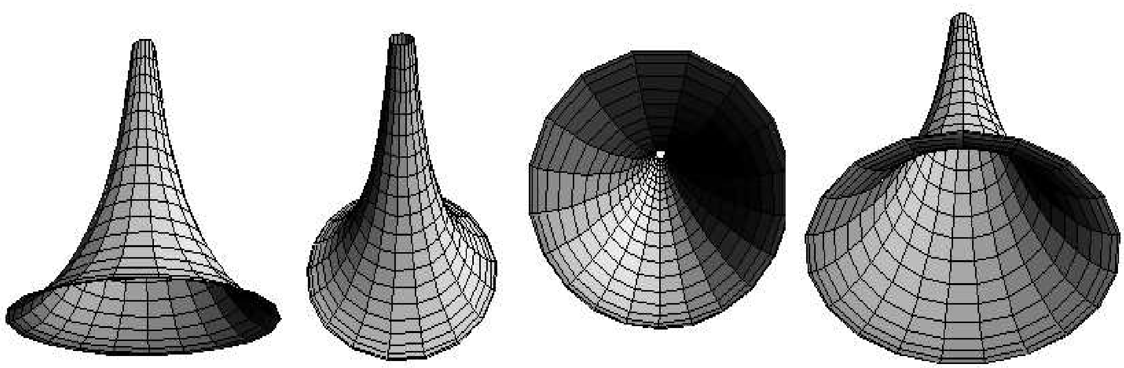
N.I. Lobachevsky (1793 - 1856).

On the Principles of Geometry, 1829.
Imaginary Geometry, 1835.

J. Bolyai, (1802 - 1860).
Correspondencia y resumen en 1825.
Trabajo publicado como apéndice de un texto de F. Bolyai, enviado a Gauss, 1831 - 1832.

Lobachevsky: Desarrollo de la geometría y análisis de la "esfera imaginaria".

J. Bolyai: Dependencia del postulado de las paralelas, "teoremas absolutos".



"Vistas de una Superficie con Curvatura Constante Negativa"
(por Ana Laura García)

FORMALIZACION DE LA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

Beltrami (1835 - 1900).
Attempt at an interpretation of non-Euclidian geometry, 1868.

Construcción del modelo del disco proyectivo, el primer modelo de geometría no-Euclidiana en el plano Euclidiano, el cual da una prueba rigurosa de la consistencia de la geometría de Lobachevsky.

Demostración de que el plano no-Euclidiano tiene curvatura constante negativa.

REVOLUCION DE LA GEOMETRIA MODERNA

Riemann (1826 - 1878) et al.

Desarrollo de la geometría diferencial moderna y de las suprefìcies de Riemann.

Klein (1849 - 1925).

On the So-called Non-Euclidian Geometry, 1871.
Realización de las geometrías Euclidianas y no-Euclidianas como casos especiales de una superficie proyectiva.

Erlanger Programme, 1872.
Un nuevo paradigma de la geometría: Estudiar un espacio geométrico por medio de las transformaciones que preservan su estructura geométrica.

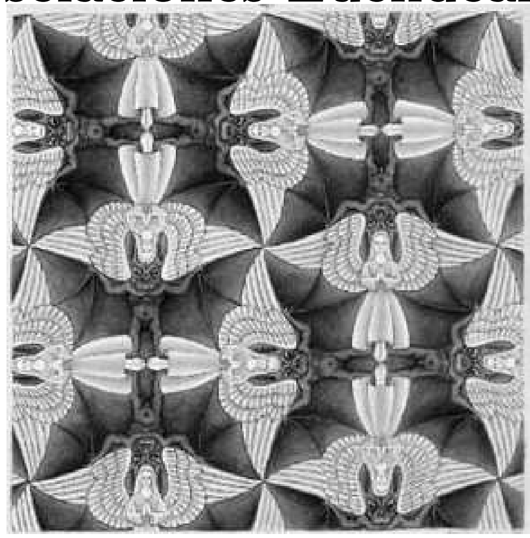
Poincaré (1854 - 1912).

La Théorie des Groupes Fuschiens, 1882.
Sur les Hypothèses Fondamentaux de la Géométrie, 1887.

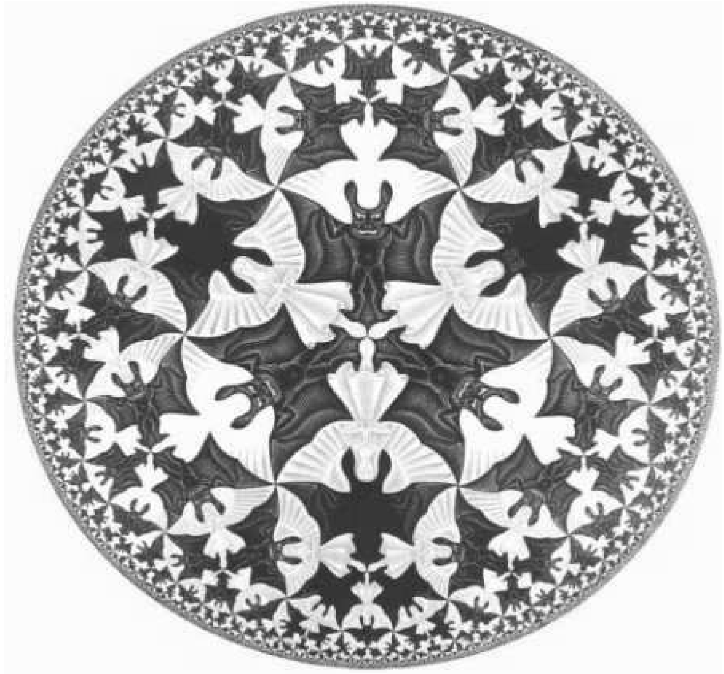
Construcción de los Modelos del Hiperboloide, del Disco y del Semiplano del plano No-Eucldiano.

Generalización de la geometría no-Euclidiana a dimensiones más altas.

Teselaciones Euclideanas



Teselaciones No-Euclideanas



(Cortesía de M.C. Escher)

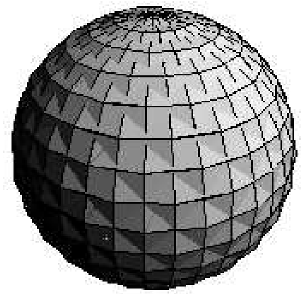
LA GENERALIZACION DE LOS POSTULADOS DE LAS PARALELAS

Plano Euclidiano (Curvatura Cero).
Dada una línea y un punto que no esté en la línea, **existe una única línea** a través del punto que es paralela a la línea dada.

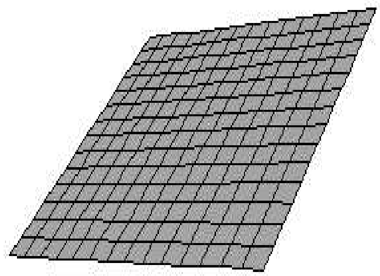
Esfera (Curvatura Positiva).
Dada una línea y un punto que no esté en la línea, **no existen líneas** a través del punto que sean paralelas a la línea dada.

Plano Hiperbólico (Curvatura Negativa).
Dada una línea y un punto que no esté en la línea, **existen infinitas líneas** a través del punto, paralelas a la línea dada.

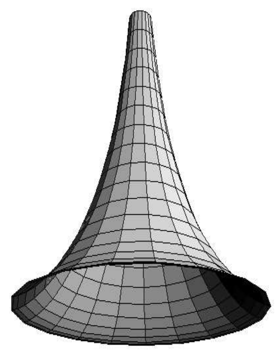
Superficie de Curvatura Positiva



Superficie de Curvatura Cero



Superficie de Curvatura Negativa



"Superficies de Curvaturas Distintas"
(por Ana Laura García)

LEYES DE LOS SENOS

Euclidiana:

$$\frac{\text{Sen } \alpha}{a} = \frac{\text{Sen } \beta}{b} = \frac{\text{Sen } \gamma}{c}$$

Esférica:

$$\frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Sen } a} = \frac{\text{Sen } \beta}{\text{Sen } b} = \frac{\text{Sen } \gamma}{\text{Sen } c}$$

Hiperbólica:

$$\frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Senh } a} = \frac{\text{Sen } \beta}{\text{Senh } b} = \frac{\text{Sen } \gamma}{\text{Senh } c}$$

Universal:

$$\frac{\text{Sen } \alpha}{\odot a} = \frac{\text{Sen } \beta}{\odot b} = \frac{\text{Sen } \gamma}{\odot c}$$

$\odot r$=Circunferencia del círculo de radio r.